Pauta Pendientes y algunas correcciones

Auxiliar 2 - MA 2002 - Sec 3 - 2012 - 2

P2 b) De a) Teníamos que: $\vec{r}(\rho,\theta) = \rho\hat{\rho} + \frac{h}{a}\rho\hat{k}$ $\quad \rho \in [0,a]$, $\theta \in [0,2\pi]$.

$$\partial_\rho \vec{r} = \hat{\rho} + \frac{h}{a}\hat{k} \qquad \partial_\theta \vec{r} = \rho\,\partial_\theta\hat{\rho} + 0 \quad y \quad \partial_\theta\hat{\rho} = \hat{\theta}$$

$$\partial_\theta \vec{r} = \rho\hat{\theta}$$

$$\therefore \quad \partial_\rho\vec{r} \times \partial_\theta\vec{r} = \left(\hat{\rho} + \frac{h}{a}\hat{k}\right) \times \rho\hat{\theta}$$

regla mano derecha en cil $\quad \hat{\rho} \to \hat{\theta} \to \hat{k}$ $\quad +$

$$= \rho\left(\hat{\rho}\times\hat{\theta}\right) + \frac{h}{a}\rho\left(\hat{k}\times\hat{\theta}\right)$$

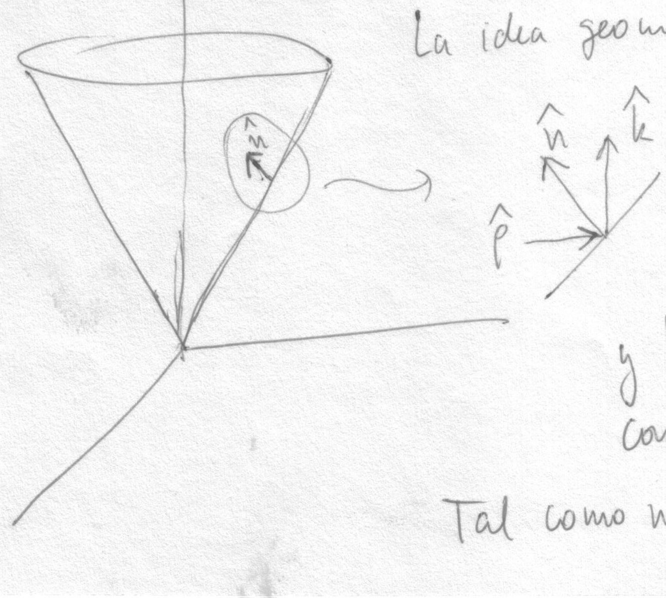
$$= \rho\hat{k} + \frac{h}{a}\rho\left(-\hat{\rho}\right) = \rho\hat{k} - \frac{h}{a}\rho\hat{\rho}$$

Por otro lado: $\|\partial_\rho\vec{r} \times \partial_\theta\vec{r}\| = \sqrt{\rho^2 + \frac{h^2}{a^2}\rho^2} = \rho\sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}}$

$\hat{k}, \hat{\rho}$ unitarios

$$\therefore \quad \hat{n}_{cono} = \frac{\partial_\rho\vec{r} \times \partial_\theta\vec{r}}{\|\partial_\rho\vec{r} \times \partial_\theta\vec{r}\|} = \frac{\rho\hat{k} - \frac{h}{a}\rho\hat{\rho}}{\rho\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}}}\left(\hat{k} - \frac{h}{a}\hat{\rho}\right)}$$

Obs. Geométrica El resultado es consistente con la idea geométrica



La idea geométrica es que la normal (interior) apunta hacia "arriba" ($\Rightarrow \lambda\hat{k}$, $\lambda > 0$) y hacia "adentro" del cono ($\Rightarrow -\alpha\hat{\rho}$, $\alpha > 0$)

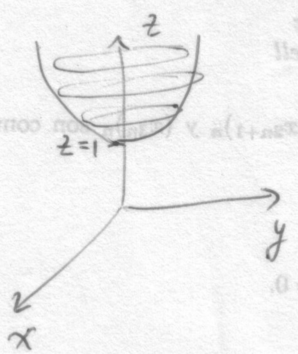
Tal como nos dió! :)

P3 | $S: z = 1 + x^2 + y^2$ dentro de $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$.

a) Bosquejo: $z = 1 + x^2 + y^2 \leftarrow$ paraboloide

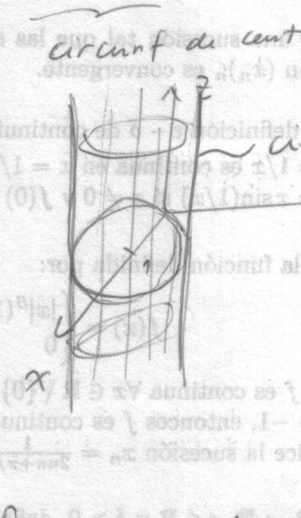
$\ulcorner$ circunf de centro $(0,0)$ (En XY)

Parab:

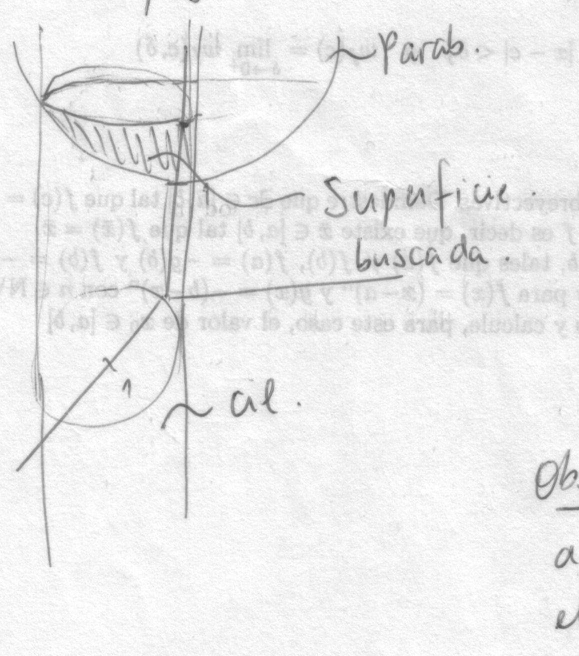


cil: $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ $\leftarrow$ se incluye lo de dentro $\Rightarrow$ es un volumen! altura z libre!

circunf de centro $(1,0)$.



° Bosquejo de la $\cap$



Cuando nos dicen que la param debe ser en cilíndricas nos están diciendo que los parámetros deben ser los de este sist. de coordenadas

Luego hay 2 opciones. Param. con (ρ, θ) o con (z, θ)

Obs. En realidad son más opciones pero incluir a θ es "natural" pues describe fácilmente el "giro".

Caso (ρ, θ): de la ecc. del paraboloide: $z = 1 + \rho^2$

Por otro lado: $(x-1)^2 + y^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 - 2x + 1 + y^2 \leq 1$

$\Leftrightarrow 0 \leq \rho^2 - 2\rho\cos\theta + 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \rho \leq 2\cos\theta$

Obs. necesariamente $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ sino $\cos\theta < 0$!

° Parametrización: $\vec{r}(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho^2 + 1)$

$\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\rho \in [0, 2\cos\theta]$.

b) $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 2\rho)$ $\qquad \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (-\rho \operatorname{sen}\theta, \rho\cos\theta, 0)$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 2\rho \\ -\rho\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(-2\rho^2\cos\theta) + \hat{\jmath}(-2\rho^2\operatorname{sen}\theta) + \hat{k}(\rho\cos^2\theta + \rho\operatorname{sen}^2\theta)$$

$$= \hat{\imath}(-2\rho^2\cos\theta) + \hat{\jmath}(-2\rho^2\operatorname{sen}\theta) + \hat{k}\rho$$

$$\therefore \hat{n} = \frac{(-2\rho^2\cos\theta, -2\rho^2\operatorname{sen}\theta, \rho)}{\sqrt{4\rho^4\cos^2\theta + 4\rho^4\operatorname{sen}^2\theta + \rho^2}} = \frac{(-2\rho^2\cos\theta, -2\rho^2\operatorname{sen}\theta, \rho)}{\rho\sqrt{4\rho^2+1}}$$

$$\boxed{\hat{n} = \frac{(-2\rho\cos\theta, -2\rho\operatorname{sen}\theta, 1)}{\sqrt{4\rho^2+1}}}$$

P4) $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y),\ (x,y) \in \Omega\} = \text{grafo}(f)$$

a) Lo natural es definir como parametrización:

$\vec{r}(x,y) = (x, y, f(x,y))$ $\qquad (x,y) \in \Omega$.

b) $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial x} = (1, 0, f_x)$ $\qquad \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (0, 1, f_y)$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = \hat{\imath}(-f_x) + \hat{\jmath}(-f_y) + \hat{k}(1) = (-f_x, -f_y, 1)$$

$$\therefore \hat{n}_{unit} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}$$ bien def si f es dif. $\forall (x,y) \in \Omega$.

P5 | Casquete elipsoide: $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$.

a) Pdq: Plano tg a S en $(x_0, y_0, z_0) \in S$ está dado por:

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} + \frac{z z_0}{c^2} = 1$$

Sol. Recordemos (de álgebra lineal) la ecc normal de un plano:

$\langle \vec{x} - \vec{x}_0, \hat{n} \rangle = 0$, con $\vec{x}_0 \in$ Plano y $\hat{n}$ un vector normal a este.

Así, en el caso del plano tg a S en $(x_0, y_0, z_0) = \vec{x}_0$ basta tomar $\hat{n} = \lambda \hat{n}_{superf}(x_0, y_0, z_0)$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Gracias a la pregunta anterior, si podemos describir a la superficie como $z = f(x,y)$ tenemos una fórmula en coord. cart. para el plano tg.

En este caso, al despejar tenemos $z = \pm c\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}$, el signo nos dice en que hemisferio estamos trabajando.

SPG $z = c\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} = f(x,y)$ (El otro es análogo pues los signos de las derivadas se compensan con el signo de la relación $z_0 = - c\sqrt{1 - \left(\frac{x_0^2}{a^2}\right) - \left(\frac{y_0^2}{b^2}\right)}$)

Luego: $f_x = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{1}{2} c \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{2x}{a^2}\right) = \frac{-cx}{a^2\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}}$

análogamente: $f_y = \frac{-cy}{b^2\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}}$

Luego, de la preg anterior, la normal a S en (x_0, y_0, z_0) está dada por

$$\hat{n}_{unit}(x_0, y_0, z_0) = \left.\frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}\right|_{(x,y,z) = (x_0, y_0, z_0)}$$

Como podemos tomar como normal $\lambda \cdot \hat{n}_{unit}|_{(x_0,y_0,z_0)}$, en particular podemos tomar $\lambda = \sqrt{f_x^2+f_y^2+1}\,\big|_{(x_0,y_0,z_0)}$ y así nos evitamos normalizar (lo que en este caso podría ser engorroso)

$\therefore$ Tomando

$$\vec{x}_0 = (x_0,y_0,z_0) \in S \quad y \quad \hat{n} = \sqrt{f_x^2+f_y^2+1}\,\big|_{(x_0,y_0,z_0)} \cdot \hat{n}_{unit}(x_0,y_0,z_0)$$

$$= (f_x, -f_y, 1)\big|_{(x_0,y_0,z_0)}$$

$$= \left(\frac{C x_0}{a^2\sqrt{1-\left(\frac{x_0}{a}\right)^2-\left(\frac{y_0}{b}\right)^2}},\ \frac{C y_0}{b^2\sqrt{1-\left(\frac{x_0}{a}\right)^2-\left(\frac{y_0}{b}\right)^2}},\ 1 \right)$$

Como $(x_0,y_0,z_0) \in S$: $\frac{z_0^2}{C^2} = 1-\left(\frac{x_0}{a}\right)^2-\left(\frac{y_0}{b}\right)^2 \Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ z_0,\, C > 0}}{\frac{z_0}{C}} = \sqrt{1-\left(\frac{x_0}{a}\right)^2-\left(\frac{y_0}{b}\right)^2}$

$$\therefore \hat{n} = \left(\frac{C x_0}{a^2 \frac{z_0}{C}},\ \frac{C y_0}{b^2 \frac{z_0}{C}},\ 1 \right) = \left(\frac{C^2 x_0}{a^2 z_0},\ \frac{C^2 y_0}{b^2 z_0},\ 1 \right)$$

$\Rightarrow$ Plano tg a S en (x_0,y_0,z_0):

$$\left\langle \vec{x}-\vec{x}_0,\ \left(\frac{C^2 x_0}{a^2 z_0},\ \frac{C^2 y_0}{b^2 z_0},\ 1 \right) \right\rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{C^2}{a^2}\frac{x_0}{z_0} \\ \frac{C^2}{b^2} y_0/z_0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

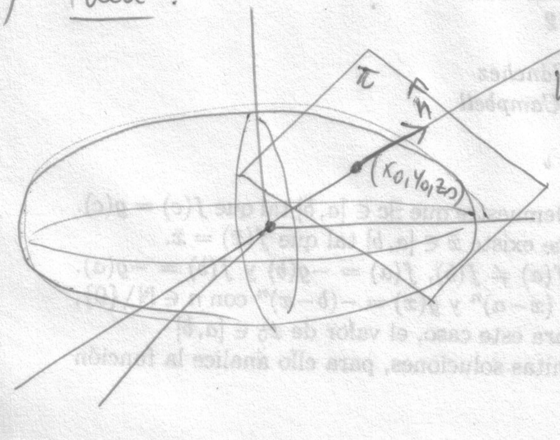
$$\Leftrightarrow (x-x_0)\frac{C^2 x_0}{a^2 z_0} + (y-y_0)\frac{C^2 y_0}{b^2 z_0} + (z-z_0) = 0 \quad / \cdot \frac{z_0}{C^2}$$

$$\Leftrightarrow (x-x_0)\frac{x_0}{a^2} + (y-y_0)\frac{y_0}{b^2} + (z-z_0)\frac{z_0}{C^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} + \frac{z z_0}{C^2} - \underbrace{\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{C^2} \right)}_{=1 \text{ pues } (x_0,y_0,z_0) \in S} = 0$$

$\therefore \quad \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$ Es la ecc del plano tg a S en (x_0, y_0, z_0) :)

b) <u>idea</u>:



L pasa por $(0,0,0)$

L es $\perp$ al plano tg $\Rightarrow$ su vector director es paralelo a $\hat{n}_{plano}$ $=$ $\hat{n}$ vista antes.

$\Leftrightarrow$ Vect. dir de L $= \lambda \hat{n}(x_0, y_0, z_0)$ $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

y la ecc de la recta dado un punto y el vector directores: $(\vec{x} - \vec{x}_0) = \lambda \hat{n}$

Tomando $\vec{x}_0 = (0,0,0)$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda n_x \\ \lambda n_y \\ \lambda n_z \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = \frac{x}{n_x} = \frac{y}{n_y} = \frac{z}{n_z}$

pero, de lo visto antes: $n_x = \frac{c^2}{a^2} \frac{x_0}{z_0}$ $\quad n_z = 1$

$n_y = \frac{c^2}{b^2} \frac{y_0}{z_0}$

$\Rightarrow \lambda = \frac{x}{c^2 x_0} \cdot a^2 z_0 = \frac{y}{c^2 y_0} \cdot b^2 z_0 = z$

$\Leftrightarrow \frac{x a^2 z_0}{c^2 x_0} = z \Leftrightarrow a^2 \frac{x}{x_0} = c^2 \frac{z}{z_0}$

$\wedge \frac{y b^2 z_0}{c^2 y_0} = z \Leftrightarrow b^2 \frac{y}{y_0} = c^2 \frac{z}{z_0}$ y se concluye. :)