Auxiliar 2 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Jueves 16 de Agosto, 2012

Profesor de Cátedra: Carlos Conca
Profesor Auxiliar: Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Definimos el Toro de radio exterior R y radio interior r como la superficie construida a partir del siguiente procedimiento:
En el plano XZ consideramos una circunferencia de radio r centrada en el punto $(R, 0)$, el Toro se obtiene al realizar una rotación del eje Z. Se pide:

a) Dar una parametrización $\vec{r}(u, v)$ del Toro, se recomienda definir un ángulo θ asociado a la rotación del eje Z y un ángulo φ asociado a la posición relativa en la circunferencia correspondiente.
b) Determine el vector normal a cada punto del Toro.

Pregunta 2. Análogamente a lo hecho con el Toro, se puede construir un Cono de altura h y radio basal a, como la superficie obtenida al rotar en el eje Z el triángulo de vértices (en el plano XZ) $(0, 0)$, $(h, 0)$ y (h, a).

a) De una parametrización $\vec{r}(u, v)$ del cono.
b) Determine el vector normal unitario.

Pregunta 3. Considere la superficie S correspondiente a la sección del paraboloide de ecuación $z = 1 + x^2 + y^2$ que queda dentro del cilindro $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$.

a) Bosqueje S. Encuentre una parametrización para S en coordenadas cilíndricas.
b) Calcule el vector normal unitario a S.

Pregunta 4. Considere la superficie S dada por el grafo de una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, es decir, que satisface la relación: $z = f(x, y)$. Supongamos que f es diferenciable en todo punto de Ω.

a) Parametrice la superficie S.
b) Determine el vector normal unitario a esta superficie y verifique que este está bien definido.

Pregunta 5. Considere el casquete elipsoidal descrito por la ecuación $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$, con $a, b, c > 0$

a) Pruebe que el plano tangente a S en el punto $(x_0, y_0, z_0) \in S$ está dado por la ecuación:
$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$$
b) Pruebe que la recta que pasa por el origen, y que es perpendicular al plano de la parte anterior, está dada por:
$$\frac{a^2 x}{x_0} = \frac{b^2 y}{y_0} = \frac{c^2 z}{z_0}$$