Auxiliar 1 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Jueves 09 de Agosto, 2012

Profesor de Cátedra: Carlos Conca
Profesor Auxiliar: Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Sea $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial y $g, f : \Omega \to \mathbb{R}$ campos escalares, todos suficientemente diferenciables de modo que las expresiones siguientes esten definidas. Pruebe las siguientes identidades:

a) $\nabla(f \cdot g) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f$
b) $div(f\vec{F}) = \nabla f \cdot \vec{F} + f div\vec{F}$
c) $rot(f\vec{F}) = \nabla f \times \vec{F} + f \cdot rot\vec{F}$

Pregunta 2.

a) Calcule el gradiente de:

$$f(x, y, z) = \frac{\arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)}{x^2 + y^2 + z^2}$$

b) Se definen las coordenadas parabólicas (ϵ, η, ϕ) mediante las siguientes relaciones:

$$x = \epsilon\eta\cos(\phi), \quad y = \epsilon\eta\sin(\phi), \quad z = \frac{1}{2}(\eta^2 - \epsilon^2)$$

donde $\eta, \epsilon > 0$ y $\phi \in [0, 2\pi]$. Calcule el gradiente y el Laplaciano en estas coordenadas.

Pregunta 3. Diremos que un campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } Z\} \to \mathbb{R}^3$ tiene simetría cilíndrica si puede escribirse en coordenadas cilíndricas como:

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_\rho(\rho)\hat{\rho}, \quad \rho > 0$$

para alguna función $F_\rho : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$.

a) Muestre que todo campo con simetría cilíndrica es irrotacional.
b) Verifique que si un campo tiene simetría cilíndrica, entonces:

$$div\vec{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(F_\rho \rho)$$

c) Deduzca que un campo $\vec{F}$ con simetría cilíndrica es selenoidal (osea, con divergencia nula) en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } Z\}$ si y solo si:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{K}{\rho}\hat{\rho}$$

para alguna constante $K \in \mathbb{R}$.

Pregunta 4. Considere las ecuaciones de Euler en régimen estacionario, en presencia de un campo gravitacional:

$$\rho\nabla\vec{v} \cdot \vec{v} + \nabla p = -\rho g\hat{k}$$

a) Demuestre la identidad:

$$\nabla\vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\nabla(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$$

b) Deduzca que para el caso de un fluido irrotacional e incompresible (i.e. ρ constante) se satisface la ecuación de Bernoulli:

$$\frac{\rho}{2}(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + p + \rho g z = cte$$

c) Un estanque cilíndrico de radio R contiene agua hasta una altura h. En el fondo del estanque se realiza una abertura de radio $\epsilon << R$. Suponiendo que el flujo es irrotacional, estacionario e incompresible, demuestre que la rapidez con la que sale el líquido es aproximadamente $\sqrt{2gh}$. Justifique las aproximaciones que realice.