Capítulo 1

Función implícita

Problema 1 *(i) Probar que el sistema*

$$\begin{cases} y^2 + z^2 - x^2 + 2 = 0 \\ yz + xz - xy - 1 = 0, \end{cases}$$

define dos funciones implícitas $y = y(x)$, $z = z(x)$ *en un entorno del punto* $(x, y, z) = (2, 1, 1)$.
(ii) Sea α *la curva parametrizada por* $\alpha(x) = (x, y(x), z(x))$, *hallar la variación de la función* $F(x, y, z) = xz - z^2 - xyz + y^2$ *en el punto* $(2, 1, 1)$ *según* α.
(iii) Comprobar que la ecuación $F(x, y, z) = 0$ *define una función implícita* $z = z(x, y)$ *en un entorno del punto* $(2, 1, 1)$ *y que* $(x, y) = (2, 1)$ *es un punto estacionario de* $z(x, y)$.

Solución:

(i) La función que define el sistema es $f(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)) = (0, 0)$, donde $f_1(x, y, z) = y^2 + z^2 - x^2 + 2$ y $f_2(x, y, z) = yz + xz - xy - 1$. Veamos que se verifican las tres condiciones del Teorema de la función implícita en el punto $(2, 1, 1)$:

a) $f(2, 1, 1) = (0, 0)$

b) Calculamos las derivadas parciales de f y comprobamos que son continuas en un entorno del punto (2,1,1).

$$\begin{array}{lll} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} = -2x & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} = 2y & \dfrac{\partial f_1}{\partial z} = 2z \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} = z - y & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} = z - x & \dfrac{\partial f_2}{\partial z} = y + x \end{array}$$

Efectivamente lo son por ser polinomios (de hecho son continuas en todo $\mathbb{R}^3$.

c)
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y}(2,1,1) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(2,1,1) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(2,1,1) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(2,1,1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

Por tanto se cumplen las tres condiciones, por lo que se puede asegurar que $y(x)$, $z(x)$ en un entorno del punto (2,1,1). Además $y(2) = 1$, $z(2) = 1$.

(ii) Para calcular la variación de la función F necesitamos conocer el gradiente de F y el vector tangente a α. $\alpha'(2) = (1, y'(2), z'(2))$. Para conocer $y'(2), z'(2)$ volvemos a aplicar el teorema de la función implícita:

$$\begin{pmatrix} y'(2) \\ z'(2) \end{pmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Por tanto $\alpha'(2) = (1, 3/2, -1/2)$. Por otro lado,

$$\nabla F(x,y,z) = (z - yz, 2y - xz, x - 2z - xy)$$

$\nabla F(2,1,1) = (0,0,-2)$. Luego la derivada direccional de F en la dirección del vector tangente a α en el punto (2,1,1) es:

$$D_v F(2,1,1) = \nabla F(2,1,1)(1,3/2,-1/2)\frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

En esta última expresión, hay que recordar que al calcular la derivada direccional, es necesario normalizar el vector dicha dirección.

(iii) Veamos que se verifican las tres condiciones del Teorema de la función implícita en el punto $(2,1,1)$:

a) $F(2,1,1) = 0$

b) En el apartado (ii) ya hemos calculado las derivadas parciales de F y son evidentemente continuas en un entorno del punto (2,1,1) por ser polinomios (son continuas en todo $\mathbb{R}^3$)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = z - yz \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y - xz \quad \frac{\partial F}{\partial z} = x - 2z - xy$$

c)
$$\frac{\partial F}{\partial z}(2,1,1) = -2 \neq 0$$

Por tanto se cumplen las tres condiciones del teorema de la función implícita, por lo que se puede asegurar que $z(x,y)$ en un entorno del punto (2,1,1). Además $z(2,1) = 1$. Además,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x}(2,1) & \frac{\partial z}{\partial y}(2,1) \end{pmatrix} = \frac{-1}{-2}(0,0) = (0,0)$$

Luego el punto (2,1) es un punto estacionario de la función $z(x,y)$.

Problema 2 *(i) Probar que el sistema*

$$\left\{\begin{array}{l} y^2+z^2-x^2+4=0 \\ e^{y-1}+x-z^2=0, \end{array}\right.$$

define dos funciones implícitas $y=y(x)$, $z=z(x)$ en un entorno del punto $(x,y,z)=(3,1,2)$. (ii) Sea α la curva parametrizada por $\alpha(x)=(x,y(x),z(x))$, calcular el vector tangente y el plano normal a α en el punto $x=3$.

Solución:

(i) La función que define el sistema es $f(x,y,z)=(f_1(x,y,z),f_2(x,y,z))=(0,0)$, donde $f_1(x,y,z)=y^2+z^2-x^2+4$ y $f_2(x,y,z)=e^{y-1}+x-z^2=0$. Veamos que se verifican las tres condiciones del Teorema de la función implícita en el punto $(3,1,2)$:

a) $f(3,1,2)=(0,0)$

b) Calculamos las derivadas parciales de f y comprobamos que son continuas en un entorno del punto (3,1,2).

$$\begin{array}{lll} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}=-2x & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}=2y & \dfrac{\partial f_1}{\partial z}=2z \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}=1 & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}=e^{y-1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z}=-2z \end{array}$$

Efectivamente lo son por ser polinomios y composición de la exponencial con un polinomio (de hecho son continuas en todo $\mathbb{R}^3$.

c)

$$\left|\begin{array}{cc} \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(3,1,2) & \dfrac{\partial f_1}{\partial z}(3,1,2) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(3,1,2) & \dfrac{\partial f_2}{\partial z}(3,1,2) \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 1 & -4 \end{array}\right| = -12 \neq 0$$

Por tanto se cumplen las tres condiciones, por lo que se puede asegurar que $y(x)$, $z(x)$ en un entorno del punto (3,1,2). Además $y(3)=1$, $z(3)=2$.

(ii) $\alpha'(3)=(1,y'(3),z'(3))$. Para hallar $y'(3),z'(3)$ aplicamos nuevamente el teorema de la función implícita:

$$\left(\begin{array}{c} y'(3) \\ z'(3) \end{array}\right) = -\left(\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 1 & -4 \end{array}\right)^{-1}\left(\begin{array}{c} -6 \\ 1 \end{array}\right) = \frac{1}{12}\left(\begin{array}{cc} -4 & -4 \\ -1 & 2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} -6 \\ 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 5/3 \\ 2/3 \end{array}\right)$$

Por tanto, un vector tangente a la curva α en el punto (3,1,2) es $v=(1,5/3,2/3)$. Y el plano normal a α en el punto (3,1,2) tendrá por ecuación:

$$(x-3)+5/3(y-1)+2/3(z-2)=0$$

Es decir, $3x+5y+2z=18$.

Problema 3 *(i) Probar que el sistema*

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 1 \\ e^{xy} + x^2 - z^2 = 1, \end{cases}$$

define dos funciones implícitas $y = y(x)$, $z = z(x)$ en un entorno del punto $(x, y, z) = (2, 0, 2)$.
(ii) Sea α la curva parametrizada por $\alpha(x) = (x, y(x), z(x))$. Hallar el vector tangente a α en el punto $x = 2$.
(iii) Calcular la derivada direccional de la función $F(x, y, z) = \sin(xy) + z^2$ en el punto $(2, 0, 2)$ según el vector tangente a α en el punto $x = 2$.

Solución:

(i) Las funciones que definen el sistema son $f_1(x, y, z) = (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 - 1$ y $f_2(x, y, z) = e^{xy} + x^2 - z^2 - 1$. Veamos que se verifican las tres condiciones del Teorema de la función implícita entorno del punto $(2, 0, 2)$.
(1) $f_1(2, 0, 2) = 0 + 1 + 0 - 1 = 0$ y $f_2(2, 0, 2) = 1 + 4 - 4 - 1 = 0$. (si)
(2)

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2(x-2) \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2(y-1) \qquad \frac{\partial f_1}{\partial z} = 2(z-2)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = ye^{xy} + 2x \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = xe^{xy} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial z} = -2z.$$

Luego existen las derivadas parciales y son continuas en todo $\mathbb{R}^3$ por ser funciones polinómicas o composición de polinomios con la exponencial.
(3)

$$\left| \begin{array}{cc} \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \end{array} \right|_{(2,0,2)} = \left| \begin{array}{cc} -2 & 0 \\ 2 & -4 \end{array} \right| = 8 \neq 0. \text{ (si)}$$

Por tanto, el Teorema de la Función Implícita asegura que en un entorno del punto (2,0,2) se pueden definir las funciones $y = y(x)$ y $z = z(x)$ diferenciables tales que $y(2) = 0$, $z(2) = 2$ y verifican el sistema. Además,

$$\begin{pmatrix} y'(2) \\ z'(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Si $\alpha(x) = (x, y(x), z(x))$ es la curva definida por el sistema, su vector tangente en 2 es $\alpha'(2) = (1, 0, 1)$.
(iii) Como F es diferenciable la derivada direccional será:

$$D_v F(2, 0, 2) = \langle \nabla F(2, 0, 2), v \rangle,$$

donde $v = \dfrac{\alpha'(2)}{||\alpha'(2)||} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$ y $\nabla F(x, y, z) = (y \cos(xy), x \cos(xy), 2z)$. Por tanto,

$$D_v F(2, 0, 2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle (0, 2, 4), (1, 0, 1) \rangle = 2\sqrt{2}$$

Problema 4 *Probar que la ecuación* $x^2y - y^2x + z^2\cos(xz) = 1$ *define una función implícita* $z = z(x,y)$ *en un entorno del punto* $(0, \sqrt{2}, 1)$. *Hallar el plano tangente a la superficie* $z = z(x,y)$ *en el punto* $(0, \sqrt{2})$.

Solución:

En primer lugar definimos la función que aparece en la ecuación. Sea $f(x,y,x) = x^2y - y^2x + z^2\cos(xz) - 1$. En segundo lugar comprobamos que se cumplen las condiciones del Teorema de la función implícita:

(i) $f(0, \sqrt{2}, 1) = 0$. (Sí se verifica)

(ii) Las parciales de la función f existen y son continuas

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - y^2 - z^3\sin(xz), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2yx, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z\cos(xz) - z^2x\sin(xz).$$

(Sí se verifica)

(iii) $\dfrac{\partial f}{\partial z}(0, \sqrt{2}, 1) = 2 \neq 0$. (Sí se verifica)

Por tanto $z = z(x,y)$ en un entorno del punto $(0, \sqrt{2}, 1)$. Además, $z(0, \sqrt{2}) = 1$ y

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{2xy - y^2 - z^3\sin(xz)}{2z\cos(xz) - z^2x\sin(xz)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{x^2 - 2yx}{2z\cos(xz) - z^2x\sin(xz)}$$

En particular, $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0, \sqrt{2}) = 1$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}(0, \sqrt{2}) = 0$.

Al tratarse de una superficie dada de forma explícita $z = z(x,y)$ la ecuación del plano tangente en el punto (a,b) es:

$$0 = \begin{vmatrix} x-a & 1 & 0 \\ y-b & 0 & 1 \\ z - z(a,b) & D_1z(a,b) & D_2z(a,b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y - \sqrt{2} & 0 & 1 \\ z-1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = z - 1 - x$$

Luego el plano tangente a nuestra superficie en el punto $(0, \sqrt{2})$ es $z = x + 1$.

Problema 5 *Probar que la ecuación* $y^2x - x^2y + x\sin(z) = 2$ *define una función implícita* $z = z(x,y)$ *en un entorno del punto* $(1, -1, 0)$. *Hallar el plano tangente a la superficie* $z = z(x,y)$ *en el punto* $(1, -1, 0)$.

Solución:

Sea $f(x,y,z) = y^2x - x^2y + x\sin(z) - 2$. Veamos que se verifican las tres condiciones del Teorema de la función implícita en el punto $(1,-1,0)$:

a) $f(1,-1,0) = 0$

b) Calculamos las derivadas parciales de f y comprobamos que son continuas en un entorno del punto (1,-1,0).

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 - 2xy + \sin(z) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - x^2 \quad \frac{\partial f}{\partial z} = x\cos(z)$$

Efectivamente lo son por ser polinomios y productos de polinomios por senos y cosenos (de hecho son continuas en todo $\mathbb{R}^3$, $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$).

c)

$$\frac{\partial f}{\partial z}(1,-1,0) = 1 \neq 0$$

Por tanto se cumplen las tres condiciones, por lo que se puede asegurar que $z(x,y)$ en un entorno del punto (1,-1,0). Además $z(1,-1) = 0$.

Para hallar el plano tangente a la superficie $z = z(x,y)$ necesitamos conocer $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$. Para ello aplicamos de nuevo el teorema de la función implícita:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -3$$

Por tanto la ecuación es, $z = 3(x-1) - 3(y+1) = 3x - 3y - 6$.

Problema 6 *Probar que el sistema de ecuaciones:*

$$\begin{cases} x^2 + \sin(x) - y^2 + z^3 = 0 \\ -\ln(1+x) + y^2z = 1 \end{cases}$$

define implícitamente dos funciones $y = y(x)$ y $z = z(x)$ en un entorno del punto $(x,y,z) = (0,1,1)$. Sean $C \subset \mathbb{R}^2$ la curva que define el sistema de ecuaciones considerado, dada en coordenadas parámetricas por $\alpha(x) = (x, y(x), z(x))$ y la función $g(x,y,z) = 2xyz + z\tan(x)$. Calcular la derivada direccional de g en el punto $(0,1,1)$, según el vector tangente a $\alpha(x)$ en $x = 0$.

Solución:

En primer lugar definimos las funciones que aparecen en el sistema de ecuaciones, $f_1(x,y,x) = x^2 + \sin(x) - y^2 + z^3$ y $f_2(x,y,z) = -\ln(1+x) + y^2 z - 1$. En segundo lugar comprobamos que se cumplen las condiciones del Teorema de la función implícita:

(i) $f_1(0,1,1) = 0$ y $f_2(0,1,1) = 0$. (Sí se verifica)

(ii) Las parciales de la función $f = (f_1, f_2)$ existen y son continuas en un entorno de $(0,1,1)$

$$\begin{array}{lll} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} = 2x + \cos(x), & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} = -2y, & \dfrac{\partial f_1}{\partial z} = 3z^2 \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} = -\dfrac{1}{1+x}, & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} = 2yz, & \dfrac{\partial f_2}{\partial z} = y^2. \end{array}$$

(Sí se verifica)

(iii) $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(0,1,1) & \dfrac{\partial f_1}{\partial z}(0,1,1) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(0,1,1) & \dfrac{\partial f_2}{\partial z}(0,1,1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0.$ (Sí se verifica)

Por tanto $y = y(x)$ y $z = z(x)$ en un entorno del punto $(0,1,1)$. Además, $y(0) = 1$, $z(0) = 1$ y

$$\begin{pmatrix} y'(0) \\ z'(0) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sea $\alpha(x) = (x, y(x), z(x))$, para hallar la derivada direccional tenemos que calcular en primer lugar el gradiente de g en el punto $(0,1,1)$ y en segundo lugar el vector tangente a α en $x = 0$.

$$\nabla g(x,y,z) = \left(2yz + \frac{z}{\cos^2(x)}, 2xz, 2xy + \tan(x)\right) \implies \nabla g(0,1,1) = (3,0,0),$$

$$\alpha'(0) = (1, 1/2, 0) \implies v = \frac{\alpha'(0)}{||\alpha'(0)||} = \frac{2}{\sqrt{5}}(1, 1/2, 0).$$

Por tanto,

$$D_v g(0,1,1) = \langle \nabla g(0,1,1) | v \rangle = \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

Problema 7 *Probar que el sistema de ecuaciones:*

$$\begin{cases} x^2 y + \operatorname{sen}(xyz) + z^2 = 1 \\ e^{yz} + xz = 1 \end{cases}$$

define implícitamente dos funciones $y = y(x)$ y $z = z(x)$ en un entorno del punto $(x,y,z) = (1,1,0)$. Sean $C \subset \mathbb{R}^2$ la curva que define el sistema de ecuaciones considerado, dada en coordenadas parámetricas por $\alpha(x) = (x, y(x), z(x))$ y la función $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Calcular la derivada direccional de g en el punto $(1,1,0)$, según el vector tangente a $\alpha(x)$ en $x=1$.

Solución:

La función que define el sistema es $f(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z)) = (0,0)$, donde $f_1(x,y,z) = x^2y + \operatorname{sen}(xyz) + z^2 - 1$ y $f_2(x,y,z) = e^{yz} + xz - 1$. Veamos que se verifican las tres condiciones del Teorema de la función implícita en el punto $(1,1,0)$:

a) $f(1,1,0) = (0,0)$

b) Calculamos las derivadas parciales de f y comprobamos que son continuas en un entorno del punto (2,1,1).

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial f_1}{\partial x} = 2xy + yz\cos(xyz) & \frac{\partial f_1}{\partial y} = x^2 + xz\cos(xyz) & \frac{\partial f_1}{\partial z} = 2z + xy\cos(xyz) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} = z & \frac{\partial f_2}{\partial y} = ze^{yz} & \frac{\partial f_2}{\partial z} = ye^{yz} + x \end{array}$$

Efectivamente lo son por ser polinomios o producto de polinomios por una composición de la exponencial y otro polinomio (de hecho son continuas en todo $\mathbb{R}^3$).

c)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y}(1,1,0) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(1,1,0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(1,1,0) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(1,1,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Por tanto se cumplen las tres condiciones, por lo que se puede asegurar que $y(x)$, $z(x)$ en un entorno del punto (1,1,0). Además $y(1)=1$, $z(1)=0$.

(ii) Para calcular la derivada direccional pedida, necesitamos conocer el gradiente de g y el vector tangente a α. $\alpha'(1) = (1, y'(1), z'(1))$. Para conocer $y'(1), z'(1)$ volvemos a aplicar el teorema de la función implícita:

$$\begin{pmatrix} y'(1) \\ z'(1) \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto $\alpha'(1) = (1,-2,0)$. Por otro lado,

$$\nabla g(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$$

$\nabla g(1,1,0) = (2,2,0)$. Por tanto,

$$D_v g(1,1,0) = (2,2,0)(1,-2,0)1/\sqrt{5} = \frac{-2}{\sqrt{5}}$$

Problema 8 *Sea $r \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$. Probar que el sistema de ecuaciones:*

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = r^2 \\ y^2 + z^2 = r^2 \end{cases}$$

define implícitamente dos funciones $x = x(z)$, $y = y(z)$ en un entorno del punto $(x, y, z) = (\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}})$. Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ la curva que define el sistema de ecuaciones considerado, dada en coordenadas paramétricas por $\alpha(z) = (x(z), y(z), z)$. Probar que el vector tangente a $\alpha(z)$ en el punto $z = \frac{r}{\sqrt{2}}$ es paralelo al plano $x - y = 0$. (b) Calcular la variación de la función $f(x, y, z) = zxy - x^2$ en el punto $(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}})$ a lo largo de esta curva.

Solución:

La función que define el sistema es $f(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)) = (0, 0)$, donde $f_1(x, y, z) = x^2 + z^2 - r^2$ y $f_2(x, y, z) = y^2 + z^2 - r^2$. Veamos que se verifican las tres condiciones del Teorema de la función implícita en el punto $(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}})$:

a) $f(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}) = (0, 0)$

b) Calculamos las derivadas parciales de f y comprobamos que son continuas en un entorno del punto $(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}})$.

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x & \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0 & \frac{\partial f_1}{\partial z} = 2z \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0 & \frac{\partial f_2}{\partial y} = 2y & \frac{\partial f_2}{\partial z} = 2z \end{array}$$

Efectivamente lo son por ser polinomios (de hecho son continuas en todo $\mathbb{R}^3$.

c)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{2}r & 0 \\ 0 & \sqrt{2}r \end{vmatrix} = 2r^2 \neq 0$$

Por tanto se cumplen las tres condiciones, por lo que se puede asegurar que $x(z)$, $y(z)$ en un entorno del punto $(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}})$. Además $y(\frac{r}{\sqrt{2}}) = \frac{r}{\sqrt{2}}$, $z(\frac{r}{\sqrt{2}}) = \frac{r}{\sqrt{2}}$.

(ii) El vector tangente a α en el punto $z = \frac{r}{\sqrt{2}}$ es $\alpha'(\frac{r}{\sqrt{2}}) = (x'(\frac{r}{\sqrt{2}}), y'(\frac{r}{\sqrt{2}}), 1)$.

Para hallar $x'(\frac{r}{\sqrt{2}})$ y $y'(\frac{r}{\sqrt{2}})$ volvemos a aplicar el teorema de la función implícita:

$$\begin{pmatrix} x'(\frac{r}{\sqrt{2}}) \\ y'(\frac{r}{\sqrt{2}}) \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}r} \begin{pmatrix} \sqrt{2}r \\ \sqrt{2}r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto $\alpha'(\frac{r}{\sqrt{2}}) = (-1,-1,1)$.

Para calcular la variación de la función f necesitamos conocer el gradiente de f y el vector tangente a α que acabamos de hallar. Por otro lado,

$$\nabla f(x,y,z) = (yz-2x, xz, xy)$$

$\nabla f(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}) = (r^2/2 - \sqrt{2}r, r^2/2, r^2/2)$. Luego la derivada direccional de f en la dirección del vector tangente a α en el punto (2,1,1) es:

$$D_v f(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}) = \nabla f(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}})(-1,-1,1)\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-r^2/2+\sqrt{2}r}{\sqrt{3}}$$

En esta última expresión, hay que recordar que al calcular la derivada direccional, es necesario normalizar el vector dicha dirección.

Problema 9 *Probar que el sistema*

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 9 \\ xy+z = 0 \end{cases}$$

define implícitamente $x = x(z)$, $y = y(z)$ en el entorno de $(x,y,z) = (2,1,-2)$. Si $\alpha(z) = (x(z), y(z), z)$ denota la curva definida por el sistema anterior, calcular la recta tangente y el plano normal a α en $z = -2$.

Solución:

Las funciones que definen el sistema son $f_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-9$ y $f_2(x,y,z) = xy+z$. Veamos que se verifican las tres condiciones del Teorema de la función implícita entorno del punto $(2,1,-2)$.
(i) $f_1(2,1,-2) = 4+1+4-9 = 0$ y $f_2(2,1,-2) = 2-2 = 0$. (si)
(ii)

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2y \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = 2z$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = y \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = x \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = 1.$$

Luego existen las derivadas parciales y son continuas por ser funciones polinómicas, es decir, $f = (f_1, f_2) \in C^{(1)}$. (si)
(iii)

$$\left|\begin{array}{cc} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{array}\right|_{(2,1,-2)} = \left|\begin{array}{cc} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{array}\right| = 6 \neq 0. \text{ (si)}$$

Por tanto, el Teorema de la Función Implícita asegura que existen $U((2,1))$, $V(-2)$ y funciones $x = x(z)$ y $y = y(z)$ diferenciables en $V(-2)$, tales que $x(-2) = 2$, $y(-2) = 1$ y verifican el sistema. Además,

$$\begin{pmatrix} x'(-2) \\ y'(-2) \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}.$$

Si $\alpha(z) = (x(z), y(z), z)$ es la curva definida por el sistema, su vector tangente en el punto $(2,1,-2)$ es $\alpha'(-2) = (5/3, -4/3, 1)$. Por tanto, la recta tangente a la curva en $z = -2$ es:

$$\frac{x-2}{5/3} = \frac{y-1}{-4/3} = \frac{z+2}{1},$$

y el plano normal es:

$$\frac{5}{3}(x-2) - \frac{4}{3}(y-1) + (z+2) = 0 \implies 5x - 4y + 3z = 0.$$

Problema 10 *Probar que el sistema*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

define implícitamente $y = y(x)$, $z = z(x)$ *en el entorno de* $(x,y,z) = (3,4,5)$. *Si* $\alpha(x) = (x, y(x), z(x))$ *denota la curva definida por el sistema anterior, calcular la variación según la curva* α *de la función* $f(x,y,z) = e^{xy} + z^2$ *en el punto* $(3,4,5)$.

Solución:

La función que define el sistema es $f(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z)) = (0,0)$, donde $f_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ y $f_2(x,y,z) = x - 2y + z$. Veamos que se verifican las tres condiciones del Teorema de la función implícita en el punto $(3,4,5)$:

a) $f(3,4,5) = (0,0)$

b) Calculamos las derivadas parciales de f y comprobamos que son continuas en un entorno del punto (3,4,5).

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x & \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2y & \frac{\partial f_1}{\partial z} = -2z \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} = 1 & \frac{\partial f_2}{\partial y} = -2 & \frac{\partial f_2}{\partial z} = 1 \end{array}$$

Efectivamente lo son por ser polinomios (de hecho son continuas en todo $\mathbb{R}^3$.

c)

$$\left|\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial y}(3,4,5) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(3,4,5) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(3,4,5) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(3,4,5) \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} 8 & -10 \\ -2 & 1 \end{array}\right| = -12 \neq 0$$

Por tanto se cumplen las tres condiciones, por lo que se puede asegurar que $y(x)$, $z(x)$ en un entorno del punto (3,4,5). Además $y(3) = 1$, $z(3) = 1$.

(ii) Para calcular la variación de la función f necesitamos conocer el ∇f y el vector tangente a α. $\alpha'(3) = (1, y'(3), z'(3))$. Para conocer $y'(3), z'(3)$ volvemos a aplicar el teorema de la función implícita:

$$\left(\begin{array}{c} y'(3) \\ \\ z'(3) \end{array}\right) = \frac{1}{12}\left(\begin{array}{cc} 1 & 10 \\ \\ 2 & 8 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 6 \\ \\ 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 4/3 \\ \\ 5/3 \end{array}\right)$$

Por tanto $\alpha'(3) = (1, 4/3, 5/3)$. Por otro lado,

$$\nabla f(x,y,z) = ye^{xy}, xe^{xy}, 2z)$$

$\nabla f(3,4,5) = (4e^{12}, 3e^{12}, 10)$. Luego la derivada direccional de f en la dirección del vector tangente a α en el punto (3,4,5) (dicho con otras palabras, la variación de f a lo largo de la curva α en el punto (3,4,5)) es:

$$D_v F(3,4,5) = \nabla F(3,4,5)(4e^{12}, 3e^{12}, 10)\frac{3}{5\sqrt{2}} = \frac{3}{5\sqrt{2}}(12e^{12} + 50)$$

Para calcular esta última expresión, ha sido necesario normalizar el vector α'.