MA2002 Cálculo en Varias Variables Semestre 2012-01

Profesor: Natacha Astromujoff

Auxiliar: Simón Piga

Auxiliar 14

Teorema Función Inversa e Implícita

P1. Considere la ecuación

$$xy = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$$

Demuestre que existe un $\epsilon > 0$ tal que si $\|x - \sqrt{e}\| < \epsilon$ podemos despejar y en función de x .

P2. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida como $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

i Pruebe que f no es inyectiva.

ii Pruebe que $f(a, b)$ es localmente invertible $\forall (a, b) \neq (0, 0)$

P3 Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Considere el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} e^u + xy^2 + v &= 2 \\ \text{sen}(u) + x^2y + v^3 &= 1 \end{aligned}$$

Demuestre que se pueden definir de forma implícita las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ en una vecindad $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (0, 2, 0, 1)$. Calcule además las derivadas de u y v en $(0, 2)$

P4. Considere un polinomio $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. Demuestre que:

i Si x_0 es raíz simple $P'(x_0) \neq 0$

ii Si x_0 es raíz simple de P la variación suave de los coeficientes a_i resulta en una variación suave de las raíces x_0 (Considere 'Suave' como, si los coeficientes contenidos en el vector $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ varían 'poco', las raíces x variarán 'poco'. Es decir si $\|a - a'\| < \epsilon \Rightarrow \exists \delta > 0 \|x - x'\| < \delta$)

iii Extienda el problema a un polinomio de varias variables.

P5 Sea $F(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), f(x, y, z) + g(x, y, z))$ con f y g funciones de clase $\mathcal{C}^1$. Demuestre que F no es invertible, ni siquiera localmente. Considere F como un cambio de variables y justifique porqué no sería un buen cambio de variables.