Cálculo en Varias Variables

Auxiliares: G. Cisternas
M. Soto
C. Serpell

P18. a) Calcule la integral

$$\int_0^1 \int_x^1 \sqrt{1+y^4}x^2 dydx.$$

b) Sea $f(x,y,z) = \int_{e^{x+y+z}}^{log(1+x^2+y)} (xt + e^{tz}logt + z)dt$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial z}$.

P19. a) Sea $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ una función continua. Si bien esta función no está definida en el origen uno podría intentar definir la integral de f sobre la bola unitaria B por un proceso de límite. Haciendo una analogía con el caso de una variable la idea sería definir

$$\int_B f = \int_{B \setminus B(0,\varepsilon)} f,$$

donde $B(0,\varepsilon)$ es la bola de centro 0 y radio ε. Supongamos que existen constantes $\alpha \in R$ y $C > 0$ tales que

$$|f(x,y,z)| \leq \frac{C}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

¿Para qué valores de α tiene sentido la definición de arriba?

b) Considere la función $f : [-1,1] \times [-1,1] \to R$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y > sen(\frac{1}{x}),\ x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } y = sen(\frac{1}{x}), x \neq 0 \\ 0 & \text{si } y < sen(\frac{1}{x}), x \neq 0 \\ -1 & \text{si x=0} \end{cases}$$

¿Es f una función integrable en $[0,1] \times [-1,1]$? Justifique en tres líneas sin demostrar.

P20. a) Considere el volumen $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ definido por las siguientes desigualdades

$$x^2 + z^2 \leq 1, \quad 0 \leq y \leq z^2 + x^2.$$

Suponiendo que Ω tiene densidad de masa $\rho(x,y,z) = (1-x^2)^{1/2}$. Calcule la masa de Ω y la componente y de su centro de masa. ¿Qué puede decir de las componentes x y centro de masa, sin hacer cálculos?

P21. Calcule la integral

$$\int_{\Omega} |y-x|,$$

donde Ω es el dominio determinado por

$$\Omega = \{(x,y,z)/x^2+y^2 \leq 4, z \geq 0, x+z \leq 3, y \geq 0\}.$$

P22. Considere la esfera de radio R cortada por un cilindro de radio $r_0 > R$, cuyo eje coincide con el eje z. Definimos el dominio Ω como la parte de la esfera que queda por fuera del cilindro.

(i) Si la densidad de la esfera es $\rho(r,\theta)$, escriba la integral a calcular para encontrar la masa de Ω. La masa es función $m(R, r_0)$.

(ii) Calcule la derivada parcial de m con respecto a r_0 y déjela expresada y simplificada en términos de integrales de una variable.

P23. a) Calcule la integral

$$\int_D\int x^2y^2dzdy$$

cuando D es la región $D = \{(x,y)/y \geq x^2 \wedge y \leq -x^2 = 8\}$.
b) Calcule la integral

$$\int_S\int x^2y^2dzdy$$

donde $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/xy \geq 1, xy \leq 2, y \geq x, y \leq 4x\}$ usando el cambio de variable $u = xy \wedge v = \frac{y}{x}$.
Hint: Dibuje S y su imagen U bajo el cambio de variables.

P24. Un casco esférico centrado en el origen tiene radio interior 10 cm y radio exterior 20 cm. Este casco esta hecho de un material cuya densidad es $0,4r^2\frac{gr}{cm^3}$, donde r es la distancia de (x,y,z) al origen. Encontrar la masa del casco. Flotará el casco si se deja caer en un estanque de agua?
Hint:

i) densidad del agua es $1gr/cm^3$.

ii) Un cuerpo flotará cuando su masa es menor que la masa del agua que desplaza.

P25. Considere el sólido Y de $\mathbb{R}^3$ determinado por las desigualdades siguientes

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0, x^2 + y^2 \geq 1$$

Este sólido tiene una densidad variable igual a:

$$p(x,y,z) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Calcule la masa del sólido.

P26. Sean f y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, acotados e integrables en $A \subseteq \mathbb{R}^2$ rectángulo. Demostrar usando sumas de Riemann que $f + g$ y $f \cdot g$ son integrables en A y que $\int\limits_A (f+g) = \int\limits_A f + g = \int\limits_A f + \int\limits_A g$.

Demuestre con esto que (justificando todos los pasos):

$$\frac{1}{2} \int\limits_{[a,b]\times[a+b]} [f(x)g(y) - f(y)g(x)]^2 = \int\limits_a^b f^2(x)dx \int\limits_a^b g^2(x)dx - (\int\limits_a^b f(x)g(x)dx)^2$$

P27. a) Calcule la integral

$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 ye^{x^3}\, dxdy$$

b) Considere la transformación $T(u,v) = (u, v(1+u^2))$ y la función $f(x,y) = x$. Grafique el conjunto $D = T([0,3]\times[0,2])$ y calcule $\int_D f$ en forma directa y usando el teorema de cambio de variable. c) Calcular

$$\int_1^2 \int_0^1 \int_0^{y-1} dzdxdy$$

en forma diecta y en el orden $dydxdz$.

P28. Sea

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} dxdy + \int_1^2 \int_0^{2-y} dxdy$$

Dibuje la región sobre la cual se define I y calcule su valor usando las integrales iteradas en los dos ordenes.

P29. Calcule (si existe) la integral

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \sin(x^2+y^2)dxdy$$