Control 2 - Cálculo en Varias Variables

Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile

Miércoles 10 de Octubre, 2012

Profesores de Cátedra: Jaime H. Ortega - Natacha Astromujoff

Profesores Auxiliares: Anton Svensson - Matías Godoy Campbell - Simón Piga

Pregunta 3.

a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ que satisface la ecuación:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Muestre que una función $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = g(u(x, y), v(x, y)) = g(x + y, x - y)$ satisface la ecuación:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) = 0$$

(2 pts.)

b) Recordemos que una función $\|\cdot\| : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ se dice norma si satisface las condiciones siguientes: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ y $\forall x, y \in \mathbb{R}^N$:

$$\begin{aligned} \|\lambda x\| &= |\lambda| \cdot \|x\| \\ \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\| \\ \|x\| = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Diremos además que dos normas: $\|\cdot\|_\alpha$ y $\|\cdot\|_\beta$ son equivalentes si existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que:

$$C_1 \|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq C_2 \|x\|_\alpha \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

El propósito de este problema, es probar que en $\mathbb{R}^N$ **todas las normas son equivalentes**. Para ello, sea $\|\cdot\|$ una norma cualquiera y $\|\cdot\|_1$ la norma definida para todo $x \in \mathbb{R}^N$ por:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^N |x_i|$$

y siga los siguientes pasos:

a) Pruebe que $\|\cdot\|_1$ es una norma en $\mathbb{R}^N$

b) Notando que $x \in \mathbb{R}^N$ se puede descomponer como $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_N e_N$ con $e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, 0, \dots, 0)$ pruebe que

$$\|x\| \leq C_2 \|x\|_1$$

con $C_2 = \max_i \|e_i\|$

c) Pruebe que $\|\cdot\| : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua.

Indicación: Use la desigualdad triangular de forma apropiada para probar que

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq C \|x - y\|_1.$$

d) Para concluir, considere el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\|_1 = 1\}$. Argumente por qué este conjunto es compacto, y utilizando la parte anterior, concluya que existe C_1 tal que:

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

(4 pts.)

Solución:

a) Notar que g es una función de clase C^2 por ser composición de funciones de esta clase. Calculemos $f_{xx} - f_{yy}$ en términos de g (donde se entiende la notación: $\partial_x f = f_x$).

Para ello primero notemos que se tienen las siguientes derivadas:

$$u_x = (x + y)_x = 1, \quad u_y = (x + y)_y = 1, \quad v_x = (x - y)_x = 1, \quad v_y = (x - y)_y = -1$$

Luego:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) = g_x(u, v) &= g_u \cdot u_x + g_v \cdot v_x = g_u + g_v \\ f_{xx}(x, y) = g_{xx}(u, v) &= (g_u + g_v)_x = (g_u)_x + (g_v)_x = (g_{uu} \cdot u_x + g_{vu} \cdot v_x) + (g_{uv} \cdot u_x + g_{vv} \cdot v_x) \\ &= g_{uu} + g_{vu} + g_{uv} + g_{vv} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{Teo Schwartz}} = g_{uu} + 2g_{uv} + g_{vv} \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} f_y(x, y) = g_y(u, v) &= g_u \cdot u_y + g_v \cdot v_y = g_u - g_v \\ f_{yy}(x, y) = g_{yy}(u, v) &= (g_u - g_v)_y = (g_u)_y - (g_v)_y = (g_{uu} \cdot u_y + g_{vu} \cdot v_y) - (g_{uv} \cdot u_y + g_{vv} \cdot v_y) \\ &= g_{uu} - g_{vu} - g_{uv} + g_{vv} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{Teo Schwartz}} = g_{uu} - 2g_{uv} + g_{vv} \end{aligned}$$

Luego:

$$f_{xx} - f_{yy} = g_{uu} + 2g_{uv} + g_{vv} - (g_{uu} - 2g_{uv} + g_{vv}) = 4g_{uv}$$

pero por hipótesis:

$$f_{xx} - f_{yy} = 0$$

Luego

$$4g_{uv} = 0 \Rightarrow g_{uv} = 0$$

como se quería probar.

Observación: Es posible hacer el problema despejando x e y en términos de u y v y luego calculando g_{uv} directamente. El desarrollo es análogo a este en cualquier caso. (Es decir, se usa igualmente la hipótesis de que f resuelve la ecuación.

Asignación de Puntajes: 0.8 por el cálculo de f_{xx} y 0.8 por el de f_{yy} , 0.4 restantes a concluir. Se debe penalizar con 0.3 el no mencionar el uso del Teorema de Schwartz (no necesariamente explicitando el nombre, pero al menos notando en forma explícita que las derivadas cruzadas son iguales). Si se hace el problema de la otra forma, hay que razonar de forma similar, 0.8 a cada derivada de g y 0.4 a concluir.

b.a) Para ver que $\|\cdot\|_1$ es norma, hay que ver que cumpla las 3 condiciones asociadas: Sean $\lambda \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^N$, luego se tiene que:

$$\|\lambda x\|_1 = \sum_{i=1}^N |\lambda x_i| = \sum_{i=1}^N |\lambda| |x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^N |x_i| = |\lambda| \|x\|_1$$

Por lo que se satisface la primera condición, por otro lado:

$$\|x + y\|_1 = \sum_{i=1}^N \underbrace{|x_i + y_i|}_{|u+v| \leq |u| + |v| \text{ en } \mathbb{R}} \leq \sum_{i=1}^N |x_i| + |y_i| = \sum_{i=1}^N |x_i| + \sum_{i=1}^N |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

Por lo que se cumple la segunda condición, finalmente:

$$\|x\|_1 = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N |x_i| = 0 \Leftrightarrow x_i = 0 \forall i \Leftrightarrow x = 0$$

Esto prueba la tercera condición, se concluye que $\|\cdot\|_1$ es norma en $\mathbb{R}^N$ (**1 Punto**)

b.b) Sigamos la indicación, como $x = x_1e_1 + \dots + x_Ne_N$ (notar que los x_i están en $\mathbb{R}$, e_i son vectores en $\mathbb{R}^N$), entonces:

$$\|x\| = \|x_1e_1 + \dots + x_Ne_N\| \leq \|x_1e_1\| + \|x_2e_2\| + \dots + \|x_Ne_N\| = |x_1|\|e_1\| + \dots + |x_N|\|e_N\| = \sum_{i=1}^N |x_i|\|e_i\|$$

donde la desigualdad es por desigualdad triangular aplicada $N - 1$ veces, la igualdad es por la propiedad $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$. Notar además que:

$$\sum_{i=1}^N |x_i|\|e_i\| \leq \sum_{i=1}^N |x_i| \cdot C_2$$

con $C_2 = \max_i \|e_i\|$, como esta cantidad es independiente de i , sale de la suma y se tiene:

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^N |x_i|\|e_i\| \leq \sum_{i=1}^N |x_i| \cdot C_2 = C_2 \sum_{i=1}^N |x_i| = C_2 \|x\|_1$$

que era lo deseado. **(1 Punto)**

b.c) Partamos probando la indicación, para ello, basta notar que:

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

análogamente:

$$\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$$

Por lo tanto, se concluye que:

$$\| \|x\| - \|y\| \| \leq \|x - y\| \leq C_2 \|x - y\|_1$$

donde la última desigualdad es por la parte anterior, con esto se concluye la prueba de la indicación. **(0.5 Puntos)**

Para probar que la función $\|\cdot\|$ es continua, basta ver que si $x_n \rightarrow x$ entonces $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$. Como estamos trabajando en $\mathbb{R}^N$ con la topología asociada a la norma $\|\cdot\|_1$, entonces, tal como se indicó en el control, la convergencia está caracterizada por:

$$x_n \rightarrow x \Leftrightarrow \|x_n - x\|_1 \rightarrow 0$$

Luego, se tiene que:

$$\| \|x_n\| - \|x\| \| \leq C_2 \|x_n - x\|_1 \rightarrow 0$$

por lo tanto: $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ y se concluye que $\|\cdot\|$ es continua en $\mathbb{R}^N$ **(0.5 Puntos)**

b.d) Primero veamos porque S es compacto (es decir, cerrado y acotado): por un lado, que sea acotado es obvio, pues si $x \in S$ entonces $\|x\|_1 = 1$, luego $S \subset B(0, 2)$ (por ejemplo, en realidad basta con cualquier bola de radio mayor estricto a 1). Así, S es acotado.

Para ver que S es cerrado hay 2 opciones, una es notar que $S = \|\cdot\|_1^{-1}\{1\}$, es decir, que S es la preimagen del cerrado $\{1\}$ a través de la función continua $\|\cdot\|_1$ (acabamos de probar en la parte anterior que toda norma lo es, en particular la norma 1). Luego, S es cerrado por resultado conocido.

La otra forma es a través de sucesiones: Sea $x_n \in S$ tal que $x_n \rightarrow x$, si probamos que $x \in S$, entonces S es cerrado, veámoslo rápidamente:

Como $x_n \in S$ entonces $\|x_n\|_1 = 1 \forall n$, como la función norma es continua, entonces $\|x_n\|_1 \rightarrow \|x\|_1$, luego, por definición de límite, dado que para todo n la norma de x_n es 1, se concluye que $\|x\|_1 = 1$, es decir: $x \in S$. Por lo tanto S es cerrado.

Así, hemos probado que S es cerrado y acotado, luego compacto. **(0.5 Puntos)**

Para concluir el resultado deseado, notemos que S es un conjunto compacto, y $\|\cdot\|$ es una función continua en todo $\mathbb{R}^N$, en particular en S . Por Teorema se tiene que $\|\cdot\|$ alcanza su máximo y su mínimo en S .

Es decir, existe $x^* \in S$ tal que $\|x^*\| \leq \|x\| \forall x \in S$
pero notemos que si $x \neq 0$ entonces $y = \frac{x}{\|x\|_1} \in S$, luego, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $x \neq 0$ se tiene:

$$\|x^*\| \leq \|y\| = \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\|$$

es decir, equivalentemente:

$$\|x^*\| \cdot \|x\|_1 \leq \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, x \neq 0$$

Notar que si bien en un principio esto vale si $x \neq 0$, para $x = 0$ a posteriori también vale (de hecho se tiene la igualdad en tal caso, pues las normas se anulan si y solo si $x = 0$). Por lo tanto, se concluye que:

$$\|x^*\| \cdot \|x\|_1 \leq \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

luego, existe $C_1 = \|x^*\| > 0$ tal que:

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

con lo que se concluye lo pedido (**0.5 Puntos**).

(Esto ya no tiene puntaje) Se concluye lo que se deseaba demostrar en la pregunta, pues hemos encontrado constantes positivas

$$C_1 = \|x^*\|, \quad C_2 = \min_i \|e_i\|$$

tales que

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\| \leq C_2 \|x\|_1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

Por lo tanto, todas las normas son equivalentes a la norma 1, y por tanto todas son equivalentes entre si. (pues la equivalencia de normas es una relación simétrica, basta tomar $\overline{C}_1 = 1/C_2$ y $\overline{C}_2 = 1/C_1$ para tener la relación simétrica entre $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_1$).