

MA2001 Cálculo en Varias Variables Semestre 2012-01**Profesor:** Natacha Astromujoff**Auxiliar:** Simón Piga

Auxiliar 4

Pre-Control 1

P1. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$:

- a Demuestre que $Fr(A \cup B) \subseteq Fr(A) \cap Fr(B)$
- b Demuestre que si A y B son cerrados entonces $A \cap B$ también lo es.
- c Si $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua y A cerrado, pruebe que $f^{-1}(A)$ también es cerrado en $\mathbb{R}^m$.
- d Pruebe que, para la misma función f de la parte c, el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^m \mid \|f(x)\| \leq 0\}$ es cerrado.

P2. Sea $f : B(x_0, r) \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$\lim_{\|x\| \rightarrow r} \|f(x)\| = \infty$$

Demuestre que la función $\|f(x)\|$ alcanza su mínimo en $B(x_0, r)$ (Considere siempre la bola abierta).

P3. Sea $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$ y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}(x^2 - y^2)$$

Demuestre que f es diferenciable en Ω y encuentre la ecuación del plano tangente al grafo de f para todos los puntos $(x, y) \in \Omega$ tales que $x = y$.

P4 Sea la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x^2 - y)^2 y^2}{x^7} & \text{si } 0 < x, 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

- i Encuentre sus derivadas parciales en $(0, 0)$ si es que existen
- ii Encuentre sus derivadas parciales si es que existen en los puntos (x_0, x_0^2)
- iii Utilice la función $\gamma = (t, \frac{t^2}{2})$ para estudiar la continuidad de la función f en $(0, 0)$.

P5 Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 , se define el Laplaciano de f como:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Considere $g(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ Encuentre Δf en función de las derivadas de g .