MA2001 Cálculo en Varias Variables Semestre 2012-01
Profesor: Natacha Astromujoff
Auxiliar: Simón Piga

Auxiliar 3
Gradiente y derivadas parciales

P1. Considere la superficie descrita por $xyz = a^3$.

a Encuentre la ecuación del plano tangente en un punto arbitrario (x_0, y_0, z_0) de la superficie.

b Demuestre que el volumen del tetraedro limitado por el plano anterior y los planos coordenados es $\frac{9a^3}{2}$ (no depende de (x_0, y_0, z_0))

P2. Sean $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables.

i Definimos $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como: $g(x) := f(sen(x), h(x^2, \alpha x))$
Calcule $g'(x)$

ii Ahora tomemos $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida como

$$G(x, y) = \big(f(ysen(x), h(x^2, \alpha x + \beta y)), f(y^2 + x^2, \frac{x}{y})\big)$$

Calcule $DG(x, y)$

P3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de Clase C^1 que satisface:

$$3x^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 2y^2 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3(f(x, y))^2$$

Considerando el cambio de variables: $u(x, y) = x$ y $v(x, y) = \frac{1}{3x} - \frac{1}{2y}$ Se define $g(u, v) := f(x(u, v), y(u, v))$

i Demuestre que g satisface la ecuación:

$$u^2 \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = (g(u, v))^2$$

ii Muestre que $\mathbb{R} : \mathbb{R} \longrightarrow$ es una función clase C^1, entonces la función

$$g(u, v) = \frac{u}{1 + uh(v)}$$

es solución de la ecuación anterior.