MA2001-2 Cálculo en Varias Variables.
Profesor: Marcelo Leseigneur P.
Auxiliares: Martin Castillo Q. - Pedro Pérez A.

Auxiliar 9(Extra)

9 de octubre de 2012

P1. (P4 Aux 8)

Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$, sea $b \in \mathbb{R}^n$ se define $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \|Ax - b\|^2$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma euclidiana, Calcule ∇f.

P2. Sea $F : (0, +\infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}$ y

$f : \mathbb{R}^3/0 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(r, \theta, \varphi) = f(x, y, z) = f(rsen(\theta)cos(\varphi), rsen(\theta)sen(\varphi), rcos(\theta))$ donde f y F son ambas diferenciables en su dominio.

Calcule $\frac{\partial F}{\partial r}$, $\frac{\partial F}{\partial \theta}$ y $\frac{\partial F}{\partial \varphi}$ en términos de $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, r, θ y φ.

P3. Sea $T : E \longrightarrow E$ donde T es una función. Pruebe que si T^k(T compuesta consigo misma k-veces) tiene un único punto fijo, entonces T tiene al menos un punto fijo.

P4. Sea l una función afín. Demuestre que si el espacio de partida tiene dimensión finita entonces:

a) l es continua.

b) l alcanza su máximo y su mínimo en cualquier conjunto cerrado y acotado.

P5. (P3 Auxiliar 5)

Sea P el espacio de todos los polinomios de una variable en $\mathbb{R}$. Se define la funcion $l : P \longrightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera.

$$l(p) = p(3) \quad \forall p \in P$$

Y se define la siguiente norma en P:

$$\|p\| = \sup_{x\in[0,1]} |\, p(x)| \quad \forall p \in P$$

a) Justifique por que $\|\cdot\|$ es norma.

b) Demuestre que l es afín.

c) Considere $p_n \in P$ como:

$$p_n(x) = (2^{-1}x)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Y calcule el limite de p_n en la norma $\|\cdot\|$.

d) Muestre que $l(p_n) \longrightarrow \infty$. ¿Que significa esto?