Pauta Control 3 - Cálculo en Varias Variables
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Miércoles 14 de Noviembre, 2012

Profesor de Cátedra: Jaime H. Ortega
Profesores Auxiliares: Anton Svensson - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1.

a) Sea f una función continua $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$. Con $\mathcal{R} = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ Demuestre que existen: $m := \min_{(x,y)\in\mathcal{R}} f(x,y)$ y $M := \max_{(x,y)\in\mathcal{R}} f(x,y)$ tales que:

$$m \cdot ab \leq \int_{\mathcal{R}} f \leq M \cdot ab$$

b) Si $f(x,y) = e^{y+x}$.
Demuestre que para $\mathcal{R} = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

$$1 \leq \int_{\mathcal{R}} f \leq e^2$$

Solución: **a)** Primero que todo, notemos que la existencia de los números m y M está asegurada puesto que f es una función continua en el compacto $\mathcal{R}$ (pues es un conjunto cerrado y acotado). **(0.5 Puntos)**
Por monotonia de la integral, si definimos $g(x) = m \ \forall x \in \mathcal{R}$ y $h(x) = M \ \forall x \in \mathcal{R}$, notando que $g(x) \leq f(x) \leq h(x) \ \forall x \in \mathcal{R}$ entonces:

$$\int_{\mathcal{R}} g \leq \int_{\mathcal{R}} f \leq \int_{\mathcal{R}} h \quad \textbf{(0.5 Puntos)}$$

(no es necesario hacerlo tan detallado, basta notar/argumentar que en $\mathcal{R}$: $m \leq f \leq M$) y como las funciones g y h son constantes, entonces:

$$\int_{\mathcal{R}} g = \int_{\mathcal{R}} m = m \int_{\mathcal{R}} 1 = m \cdot \text{Área}(\mathcal{R}) = m \cdot ab$$

$$\int_{\mathcal{R}} h = \int_{\mathcal{R}} M = M \int_{\mathcal{R}} 1 = M \cdot \text{Área}(\mathcal{R}) = M \cdot ab$$

de donde se concluye que:

$$m \cdot ab \leq \int_{\mathcal{R}} f \leq M \cdot ab \quad \textbf{(2.0 Puntos)}$$

Notar que es posible probar esto con sumas de Riemann, aunque es mucho más tedioso. (Ver Pauta Auxiliar 10)

b) Notemos primero que todo que $f(x,y) = e^{y+x}$ es continua en todo $\mathbb{R}^2$, en particular en $\mathcal{R}$ (que en este caso es el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ pues $a = b = 1$) **(0.5 Puntos)**, por lo tanto, por la parte anterior:

$$m \leq \int_{\mathcal{R}} f \leq M$$

donde m y M son el máximo y mínimo de la función en este compacto.
Para concluir, notemos que $y + x \in [0,2]$ si $x, y \in [0,1] \times [0,1]$ **(1 Punto)** y como la función de una variable e^t es creciente, entonces, si $t = x+y \in [0,2]$ se deduce que: $m = e^0 = 1, \ M = e^2$ y se concluye. **(1.5 Puntos)**

Pregunta 2.

a) Hallar el volumen del sólido limitado por las superficies $z = x^2 + y^2$ y $z = 4 - y^2$
b) Calcule el volumen del sólido limitado por:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ 3z^2 &= x^2 + y^2 \\ z^2 &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Solución: **a)** Notando que, si estudiamos la intersección de las superficies, se obtiene que:

$$z = x^2 + y^2 = 4 - y^2 \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 = 4 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$$

es decir, todo punto perteneciente a ambas superficies a altura z dada, está en la elipse de ecuación $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$.
Por lo tanto, se tiene que el volumen considerado es el volúmen de la región $\mathcal{D}$ dada por (hagan un dibujo y se convencerán de las desigualdades):

$$\mathcal{D} = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \le z \le 4 - y^2 \wedge x^2 + 2y^2 \le 4\} \quad \textbf{(1 Punto)}$$

Luego como:

$$Vol(\mathcal{D}) = \iiint_{\mathcal{D}} 1dxdydz$$

entonces, como la restricción de estar en la elipse es independiente de z, se tiene:

$$Vol(\mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{E}} dxdy \int_{x^2+y^2}^{4-y^2} 1dz$$

luego:

$$Vol(\mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{E}} 4 - 2y^2 - x^2 dxdy \quad \textbf{(1 Punto)}$$

donde $\mathcal{E} = \{(x, y) \mid x^2 + 2y^2 \le 4\} = \left\{(x, y) \mid \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 \le 1\right\}$. Esto sugiere el cambio de variables siguiente:

$$x = 2\rho\cos\theta, \ y = \sqrt{2}\rho\sin\theta, \quad \rho \in [0, 1], \ \theta \in [0, 2\pi]$$

que lleva el rectángulo asociado en (ρ, θ) a $\mathcal{E}$, así, por cambio de variables (notando que en este caso $|\det T'| = 2\sqrt{2}\rho$):

$$Vol(\mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{E}} 4 - 2y^2 - x^2 dxdy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (4 - 4\rho^2) \cdot 2\sqrt{2}\rho d\theta d\rho = 16\sqrt{2}\pi \int_0^1 (1 - \rho^2)\rho d\rho = 16\sqrt{2}\pi\frac{1}{4} = 4\sqrt{2}\pi$$

(1 Punto) por concluir.

b) En esta parte basta notar que la región donde debemos integrar es la región comprendida entre los conos de ecuaciones $z^2 = x^2 + y^2$, $3z^2 = x^2 + y^2$ y dentro de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Es fácil notar que se tiene en tal caso que:

$$\mathcal{D} = \{(x, y, z) \mid \frac{x^2 + y^2}{3} \le z \le x^2 + y^2 \wedge x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$$

lo natural es describir esta región en coordenadas esféricas, notando que cada cono (como superficie) inscrito en una esfera se ver como los puntos con ángulo azimutal φ fijo, $\theta \in [0, 2\pi]$ y $r \in [0, R]$, si el cono tiene ecuación $Az^2 = x^2 + y^2$, $A > 0$ entonces:

$$\varphi = \arctan \frac{1}{\sqrt{A}}$$

en nuestro caso, al cono de ecuación $3z^2 = x^2 + y^2$, le corresponde el ángulo azimutal $\varphi = \frac{\pi}{3}$ y al cono $z^2 = x^2 + y^2$ le corresponde el ángulo $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Por lo tanto, en coordenadas esféricas:

$$\mathcal{D} = \{(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi) \mid \theta \in [0, 2\pi], r \in [0, 1], \varphi \in [\pi/4, \pi/3] \cup [\pi + \pi/4, \pi + 2\pi/3]\}$$

Esta última condición se agrega pues no se exige $z \ge 0$, por lo tanto por simetría se debe considerar que las ecuaciones de los conos definen también el cono 'hacia abajo'.
(2 Puntos) por todas estas consideraciones. (Quitar 0.3 a quienes olviden considerar que el volumen es simétrico respecto al plano $z = 0$)

Por lo tanto, por Teorema de Cambio de Variable (y por simetría):

$$Vol(\mathcal{D}) = \iiint_{\mathcal{D}} 1dxdydz = 2 \cdot \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/3} r^2 \sin\varphi d\phi d\rho dr = 4\pi \cdot \frac{1}{3} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin\varphi d\varphi = \frac{4\pi}{3}(-\cos\varphi)\Big|_{\pi/4}^{\pi/3}$$

$$= \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) = 2\pi\frac{\sqrt{2}-1}{3}$$

(1 Punto) por el cálculo final.

Pregunta 3.

a) Calcular de la forma en que los cálculos sean más simples:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y}dydx$$

b) Cambiar el orden de integración y evaluar:

$$\int_{0}^{1}\int_{e^x}^{e^{2x}} x\ln(y)dydx$$

Solución: **a)** Esta integral iterada se puede resolver directamente:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y}dydx &= \int_{-1}^{1}\int_{-2|x|}^{|x|} e^{x}e^{y}dydx = \int_{-1}^{1} e^{x}\int_{-2|x|}^{|x|} e^{y}dydx = \int_{-1}^{1} e^{x}\cdot(e^{y})\Big|_{-2|x|}^{|x|}dx \\ &= \int_{-1}^{1} e^{x}\cdot(e^{|x|}-e^{-2|x|})dx = \int_{-1}^{1} e^{x+|x|}-e^{x-2|x|}dx\end{aligned}$$

para poder calcular explícitamente esta integral, basta separarla como la integral con $x \in (-1,0)$ y $x \in (0,1)$ de modo de 'sacarse de encima' el módulo:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y}dydx &= \int_{-1}^{1} e^{x+|x|}-e^{x-2|x|}dx = \int_{-1}^{0} e^{x+(-x)}-e^{x-2(-x)}dx + \int_{0}^{1} e^{x+(x)}-e^{x-2(x)}dx \\ &= \int_{-1}^{0} e^{0}-e^{3x}dx + \int_{0}^{1} e^{2x}-e^{-x}dx = \int_{-1}^{0} 1-e^{3x}dx + \int_{0}^{1} e^{2x}-e^{-x}dx\end{aligned}$$

(2 Puntos) por llegar a estas integrales. Lo restante para el cálculo siguiente:
Finalmente nos quedan estas dos integrales de 1 variable, las cuales se resuelven de forma usual y se tiene:

$$\int_{0}^{1} e^{2x}-e^{-x}dx = -\frac{3}{2}+\frac{e^2}{2}+e^{-1}$$

$$\int_{-1}^{0} 1-e^{3x}dx = \frac{2}{3}+\frac{e^{-3}}{3}$$

y por lo tanto

$$\int_{-1}^{1}\int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y}dydx = \frac{1}{3}e^{-3}-\frac{5}{6}+e^{-1}+\frac{e^2}{2} \quad \textbf{(1 Punto)}$$

Notar que se llega al mismo resultado si se resuelve haciendo:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y}dydx = \int_{-1}^{0}\int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y}dydx + \int_{0}^{1}\int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y}dydx$$

donde en ambas integrales se puede reemplazar los módulos correspondientes y se llega al mismo desarrollo anterior.

b) En este problema hay que tener bastante cuidado al cambiar el orden de integración, pues no es llegar y cambiar despejando x en las restricciones (básicamente pues cuando $x = 1$, no hay igualdad entre e^x y e^{2x}, osea, ese segmento se 'cierra' con la recta $x = 1$), de hecho, se tiene que, por un lado por Fubini:

$$\int_{0}^{1}\int_{e^x}^{e^{2x}} x\ln(y)dydx = \iint_{\mathcal{D}} x\ln(y)dydx$$

con $\mathcal{D} = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ e^x \le y \le e^{2x}\}$ dar **(1 Punto)** al notar esto, si queremos escribir $\mathcal{D}$ con y entre parámetros fijos, se tiene que (hagan un dibujo y se convencerán):

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \mid 0 \le y \le e,\ \frac{\ln(y)}{2} \le x \le \ln(y)\} \cup \{(x,y) \mid e \le y \le e^2,\ \frac{\ln(y)}{2} \le x \le 1\}$$

Dada la dificultad de esta parte (probablemente muchos tomen $\mathcal{D}$ con $0 \leq y \leq e^2$ y $\frac{\ln(y)}{2} \leq x \leq \ln(y)$ lo cual es incorrecto, penalizar con 0.7 punto), se le asigna **(1 Punto)**.
Luego de esto el cálculo ya es sencillo, se tiene:

$$\int_0^1 \int_{e^x}^{e^{2x}} x\ln(y)dydx = \iint_{\mathcal{D}} x\ln(y)dydx = \int_1^e \int_{\frac{\ln(y)}{2}}^{\ln(y)} x\ln(y)dxdy + \int_e^{e^2} \int_{\frac{\ln(y)}{2}}^{1} x\ln(y)dxdy$$

y por lo tanto:

$$\int_0^1 \int_{e^x}^{e^{2x}} x\ln(y)dydx = \int_1^e \int_{\frac{\ln(y)}{2}}^{\ln(y)} x\ln(y)dxdy + \int_e^{e^2} \int_{\frac{\ln(y)}{2}}^{1} x\ln(y)dxdy$$

luego, veamos por ejemplo la primera integral:

$$\int_1^e \int_{\frac{\ln(y)}{2}}^{\ln(y)} x\ln(y)dxdy = \int_1^e \ln(y) \int_{\frac{\ln(y)}{2}}^{\ln(y)} xdxdy = \int_1^e \ln(y)\frac{x^2}{2}\Big|_{\ln(y)/2}^{\ln(y)} dy = \int_1^e \frac{3\ln^3(y)}{8}dy$$

y la segunda:

$$\int_e^{e^2} \int_{\frac{\ln(y)}{2}}^{1} x\ln(y)dxdy = \int_e^{e^2} \ln(y) \int_{\frac{\ln(y)}{2}}^{1} xdxdy = \int_e^{e^2} \ln(y)\frac{x^2}{2}\Big|_{\ln(y)/2}^{1} dy = \int_e^{e^2} \frac{\ln(y)}{2} - \frac{\ln^3(y)}{8}dy$$

Por lo tanto:

$$\int_0^1 \int_{e^x}^{e^{2x}} x\ln(y)dydx = \int_1^e \frac{3\ln^3(y)}{8}dy + \int_e^{e^2} \frac{\ln(y)}{2} - \frac{\ln^3(y)}{8}dy$$

Por llegar a esta integral se dan **(0.5 Puntos)**.
Integrando por partes como se sugirió (para sacar la primitiva de $\ln^3(y)$) y haciéndo el cálculo correspondiente se concluye que:

$$\int ln^3(y)dy = ln^3(y)\cdot y - 3y\ln^2(y) + 6y\ln(y) - 6y + C$$

además, recordando que:

$$\int \ln(y)dy = y\ln(y) - y + C$$

y por lo tanto:

$$\int_0^1 \int_{e^x}^{e^{2x}} x\ln(y)dydx = \frac{9}{4} - e + \frac{e^2}{4} \quad \textbf{(0.5 Puntos)}$$