

P1 | a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$

$$\text{Veamos que } \iiint_D f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dx dy dz = 4\pi \int_0^R f(r) r^2 dr$$

Sol:

Esto es una aplicación directa del TCV. Notar que tanto D como el integrando poseen simetría esférica, así si: $x = r \cos \theta \sin \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \varphi$

Entonces: $T(r, \theta, \varphi) = (r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi)$

$$T: (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

es tal que: $T([0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]) = D = B(0, R)$

en nuestra not. usual: $D' = (0, R) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)$

Notar que (conocido!) T es inyectiva y su matriz Jac invertible en D y T es C^∞ en donde está def (y se sabe que $|\det T'| = r^2 \sin \varphi$)

Por TCV: $\iiint_D f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dx dy dz = \iiint_{D'} f(T(r, \theta, \varphi)) |\det T'| dr d\theta d\varphi$

pero $\iiint_{D'} f(T(r, \theta, \varphi)) |\det T'| dr d\theta d\varphi = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(r) \cdot r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi \leftarrow \text{no dep de } \theta$

$$= \pi \int_0^R \int_0^\pi r^2 f(r) \sin \varphi d\varphi dr = 2\pi \int_0^R r^2 f(r) \cos \varphi \Big|_0^\pi dr$$

$$= 4\pi \int_0^R r^2 f(r) dr \quad \checkmark$$

notar que tomando $f(r) \equiv 1$, se tiene:

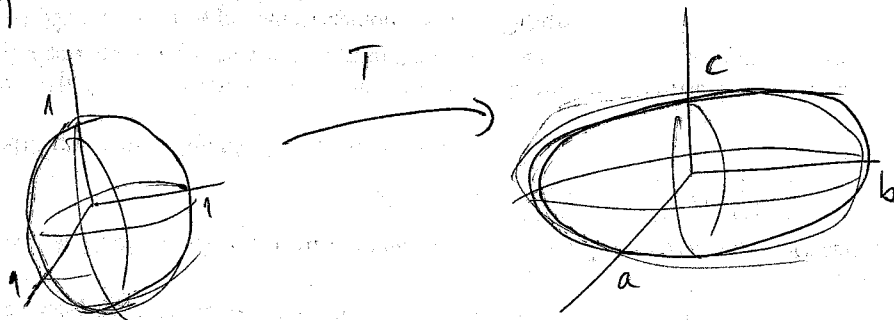
$$\iiint_D 1 dx dy dz = \text{Vol}(D) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi 1 \cdot r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi = 4\pi \int_0^R r^2 dr = \frac{4\pi R^3}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Vol}(B(0, R)) = \frac{4\pi R^3}{3}}$$

b) Queremos el Vol. de $\mathcal{E} = \{(x,y,z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$ 2/8

Como sugiere el hint, busquemos una transf. que lleve una bola en $\mathcal{E}$, de esa forma gracias al TCV podremos determinar el vol pedido.

Notar que $T(x,y,z) = (ax, by, cz)$ hace lo pedido



Así pues, nosotros queremos

$$V(\mathcal{E}) = \iiint_{\mathcal{E}} 1 \, dx \, dy \, dz$$

Como $T(B(0,1)) = \mathcal{E}$

y obviamente T es inject, C^∞

y además $T'(x,y,z) = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow |\det T'| = abc$$

invertible $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ vale TCV

y se tiene: $V(\mathcal{E}) = \iiint_{\mathcal{E}} \underbrace{1}_{f} \, dx \, dy \, dz = \iiint_{B(0,1)} \underbrace{f(T)}_{=1} |\det T'| \, dx \, dy \, dz$

$$= \iiint_{B(0,1)} 1 \cdot abc \, dx \, dy \, dz = abc \, \text{Vol}(B(0,1))$$

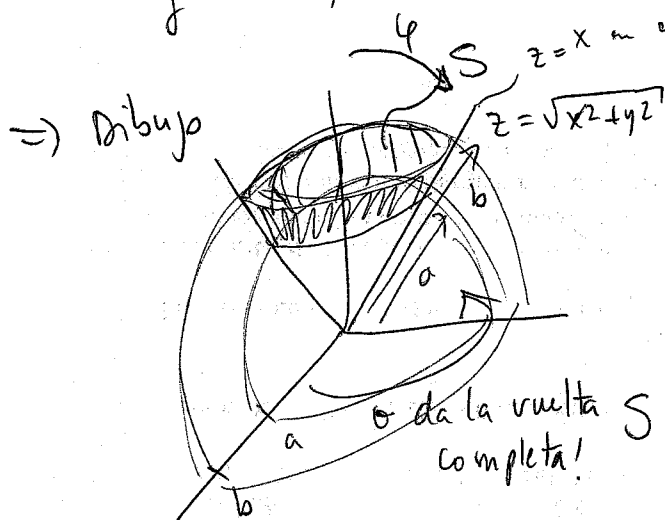
$$= \frac{4\pi}{3} abc.$$

o.o $V(\mathcal{E}) = \frac{4\pi}{3} abc$

c) Buscamos $\text{Vol}(S)$ $S = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2, x^2 + y^2 \leq z^2, z \geq 0, a < b, a, b > 0\}$

Hagamos un dibujo para entender la región S .

Notar que $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ es una bola de radio a (o de altura) de $B(0,0)$
 $x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2$ es una bola de radio b
 $x^2 + y^2 \leq z^2$ es la reg. m. cerrada por el cono $x^2 + y^2 = z^2$.
 $z > 0$ puede estar en el hemisf. superior.



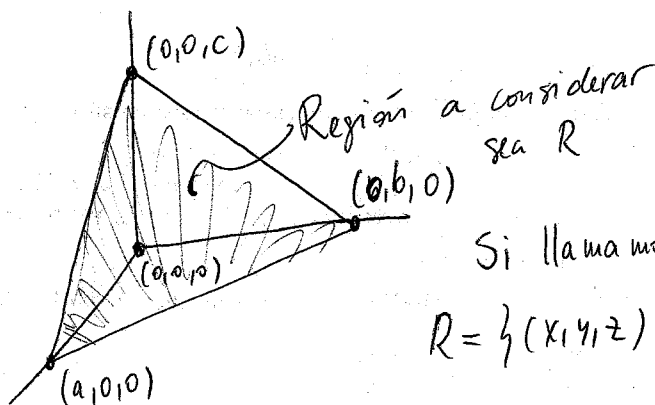
Naturalmente la mejor forma de describir el volumen es con coord. esféricas
 pues en tales coordenadas:

$$S = \{(r, \theta, \varphi) / a \leq r \leq b, \varphi \in [0, \pi/4], \theta \in [0, 2\pi]\}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Vol}(S) &= \iiint_S 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_a^b 1 \cdot \underbrace{|\det J|}_{r^2 \sin \varphi} \, dr \, d\varphi \, d\theta \\ &= 2\pi \left(\frac{b^3 - a^3}{3} \right) \int_0^{\pi/4} \sin \varphi \, d\varphi = 2\pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{b^3 - a^3}{3} \right) \end{aligned}$$

$\cos \varphi \Big|_0^{\pi/4}$

P2 a) Queremos el volumen de la sigte. región:



Obviamente:

$$\text{Vol}(R) = \iiint_R 1 \, dx \, dy \, dz$$

Si llamamos a la cara superior π , se tiene:

$$R = \{(x, y, z) / x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \text{ y } (x, y, z) \text{ debajo de } \pi\}$$

Si Determinamos la ecuación del plano π , que pasa por $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ y $(0, 0, c)$

nos da: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

4/8

$$\begin{aligned} \circ \circ \quad R &= \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \leq 1 \} \quad \text{Cond para } x, y \\ &= \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, z \leq c(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b})\} \quad \text{Cond para } x, y \end{aligned}$$

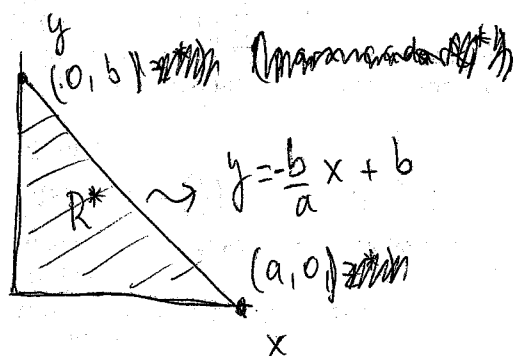
¿Donde varía x (o y)?

Miremos "un corte"

R^* son los puntos bajo

la recta de ecuación

$$y = -\frac{b}{a}x + b$$



$$\circ \circ \quad R = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b(1 - \frac{x}{a}), 0 \leq z \leq c(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b})\}$$

y por Fubini:

$$\iiint_R 1 dx dy dz = \int_0^a \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} \int_0^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})} 1 dz dy dx$$

$$= \int_0^a \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} c(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}) dy dx$$

$$= c \int_0^a \left[b(1 - \frac{x}{a})(1 - \frac{x}{a}) - \frac{y^2}{2b} \right]_0^{b(1-\frac{x}{a})} dx$$

$$= c \int_0^a \left[b(1 - \frac{x}{a})^2 - \frac{b^2}{2b} (1 - \frac{x}{a})^2 \right] dx$$

$$= c \int_0^a \frac{b}{2} (1 - \frac{x}{a})^2 dx = \frac{cb}{2} \int_0^a (1 - \frac{x}{a})^2 dx$$

$$= \frac{cb}{2} \left(-\frac{a}{3} (1 - \frac{x}{a})^3 \right) \Big|_0^a = \frac{abc}{6} \quad \text{como se diseña.}$$

$$b) I = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \sin(x^3) dx dy dw$$

Primero escribamos la integral como $\iiint \dots dy dx dw$

para ello, primero notar que, dado w fijo:

$$\int_0^1 \int_0^1 \sin(x^3) dx dy = \int_0^1 \int_w^x \sin(x^3) dy dx = \int_0^1 \sin(x^3) (x-w) dx$$

$$\{(x,y) / y \leq x \leq 1, w \leq y \leq 1\} = \{(x,y) / w \leq x \leq 1, w \leq y \leq x\}$$

$$\therefore \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \sin(x^3) dx dy dw = \int_0^1 \int_0^1 \int_w^x \sin(x^3) dy dx dw = \int_0^1 \int_w^1 \sin(x^3) (x-w) dx dw$$

Esta nueva integral hay que escribirla como $\iint \dots dw dx$

$$\int_0^1 \int_0^x \sin x^3 \cdot (x-w) dw dx = \int_0^1 \int_0^x \sin x^3 \cdot (x-w) dw dx = \int_0^1 \sin x^3 \cdot \left. \frac{xw}{2} \right|_0^x dx$$

$$= \sin x^3 \cdot \left. \frac{w^2}{2} \right|_0^x dx$$

$$\{(x,w) / w \leq x \leq 1, 0 \leq w \leq x\} = \{(x,w) / 0 \leq w \leq x, 0 \leq x \leq 1\}$$

$$= \int_0^1 \left(\sin x^3 \cdot x^2 - \sin x^3 \cdot \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \sin x^3 \cdot x^2 dx = \frac{1}{4} \int_0^1 \sin x^3 \cdot x^2 dx$$

$$\text{Si } x^3 = u \Rightarrow 3x^2 dx = du$$

$$= \frac{1}{12} \int_0^1 \sin u du$$

$$= \frac{1}{12} (-\cos u) \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{12} (1 - \cos(1))$$

//

P3 | a) $\iiint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy dz$ $D = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$

6/8

Usemos coord. cilíndricas: $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, $z = z$.

En este caso: $x^2+y^2+z^2 \leq 1 \Leftrightarrow z^2 \leq 1-\rho^2$

$\Leftrightarrow -\sqrt{1-\rho^2} \leq z \leq \sqrt{1-\rho^2}$

$\theta \in [0, 2\pi]$, ¿ ρ ?

En un corte con el plano $z = c$ fijo: notar que:

$x^2+y^2 \leq 1-c^2 \quad (\Rightarrow c \leq 1)$

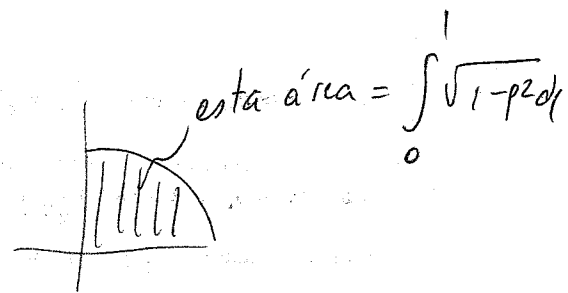
$\Rightarrow \rho^2 \leq 1-c^2$

$$\iiint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy dz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\sqrt{1-\rho^2}}^{\sqrt{1-\rho^2}} \frac{1}{\rho} \cdot \rho d\theta d\rho dz$$

$$= 2\pi \cdot 2 \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2} d\rho$$

$\frac{1}{4}$ Area circ

$$= 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} \pi = \pi^2$$



Otra forma: Esféricas:

$D_{\text{esf}} = R = \{(r, \theta, \varphi) \mid r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi]\}$

$$\iiint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy dz = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{r^2 \sin^2 \varphi}} \cdot r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r^2 \sin \varphi}{r \sin \varphi} dr d\theta d\varphi = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r dr d\theta d\varphi$$

$$= \pi \cdot 2\pi \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_0^1$$

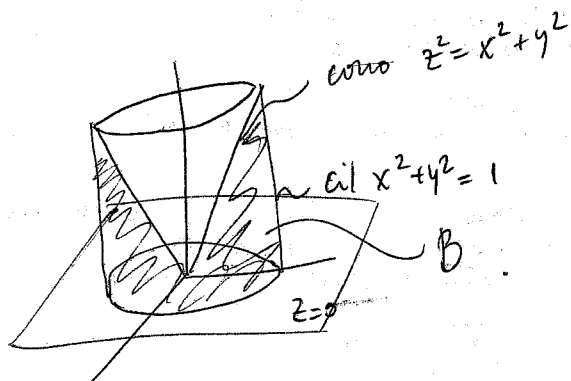
$$= \pi^2 \text{ igual que antes } \dots$$

b) $\iiint_B z dx dy dz$

$B =$ reg dentro del cil $x^2 + y^2 = 1$, sobre $z = 0$
y bajo el cono $z^2 = x^2 + y^2$.

7/8

Dibujo de B :



Naturalmente, y como dice el enunciado, hay que usar coord. cilíndricas.

Notar que, en cilíndricas $B = \{(p \cos \theta, p \sin \theta, z) \mid 0 \leq p \leq 1, \theta \in [0, 2\pi], 0 \leq z \leq p\}$

Así, recordando que $|\det T'(p, \theta, z)| = p$, se tiene:

$$\begin{aligned} \iiint_B z dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^p z \cdot p dz d\theta dp = 2\pi \int_0^1 p dp \int_0^p z dz = 2\pi \int_0^1 \frac{p^3}{2} dp \\ &= 2\pi \frac{p^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

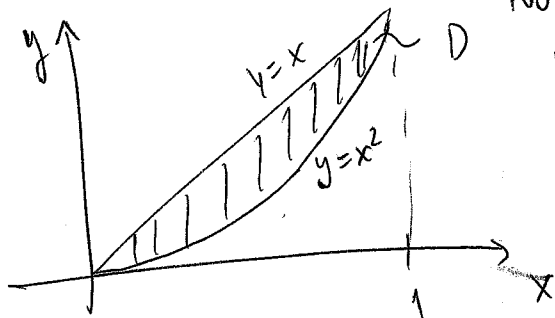
P4 a) $f: \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ cont. y posit.

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_0^1 \int_{x^2}^x f(x,y) dy dx$$

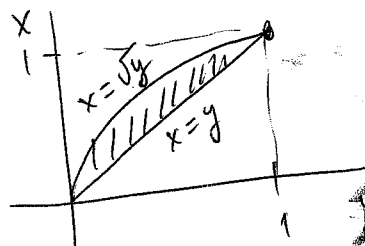
Queremos conocer D y escribir la int como $\iint \dots dx dy$.

Notar que por Fubini: $D = \{(x,y) \mid x^2 \leq y \leq x \wedge 0 \leq x \leq 1\}$

Luego



Notar que para "invertir" el orden, debemos ver el "gráfico al revés" (o sea ver $y(x)$ (dar vuelta el gráfico))



$$\circ \circ \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, \sqrt{y} \geq \frac{x}{2} \geq y\}$$

$$\circ \circ \quad \iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx dy$$