P1 a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integ. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}$

Pdq $\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)\,dy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x,y)\,dx$

Sol. Esto no es más que una aplicación del Teo. de Fubini.

Recordemos que $\iint_{A\times B} f(x,y)\,dxdy = \int_A dx \int_B f(x,y)\,dy = \int_B dy \int_A f(x,y)\,dx$

Notar que, si definimos $g(x,y) = f(x,y)\,\mathbb{1}_D$ en $[0,1]\times[0,1]$, entonces:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{[0,1]\times[0,1]} g(x,y)\,dxdy \underset{\text{Fub.}}{=} \int_0^1 dx \int_0^1 g(x,y)\,dy \underset{\text{Fub}}{=} \int_0^1 dy \int_0^1 g(x,y)\,dx$$

pero: $\int_0^1 g(x,y)\,dy = \int_0^1 f(x,y)\,\underbrace{\mathbb{1}_D(x,y)}_{=\begin{cases}1 & \text{si } 0\le y\le x\\ 0 & \sim\end{cases}}\,dy$ ← x es fijo, y varía $= \int_0^x f(x,y)\,dy$

$$\Rightarrow \int_0^1 dx \int_0^1 g(x,y)\,dy = \int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)\,dy \quad ✓$$

Por otro lado: $\int_0^1 g(x,y)\,dx = \int_0^1 f(x,y)\,\underbrace{\mathbb{1}_D(x,y)}_{\begin{cases}1 & \text{si } 0\le y\le x\\ 0 & \sim\end{cases}}\,dx$ ← y es fijo! $= \int_y^1 f(x,y)\,dx$

$$\Rightarrow \int_0^1 dy \int_0^1 g(x,y)\,dx = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x,y)\,dx \quad ✓$$

$$\therefore \iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{[0,1]\times[0,1]} g(x,y)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)\,dy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x,y)\,dx \quad ✓$$

b) Calculemos $\displaystyle\int_0^1\left(\int_y^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx\right)dy$

Obs. NO se puede hacer directamente, es posible probar que $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ no posee primitiva expresable en términos de funciones "elementales".

Luego, DEBEMOS usar Fubini:

de la parte anterior: $\displaystyle\int_0^1\left(\int_y^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx\right)dy = \int_0^1\left(\int_0^x \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dy\right)dx$

$$= \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot y\Big|_0^x\,dx = \int_0^1 \operatorname{sen} x\,dx$$

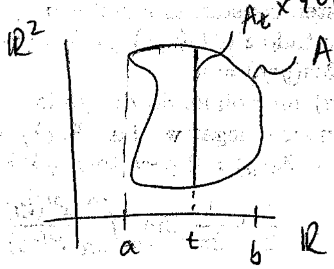
$$= -\cos x\Big|_0^1 = 1-\cos(1)$$

Obs. La parte a) fue la "prueba formal" de las int. iteradas, pues tb. podemos notar que $D=\{(x,y)\ /\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\} = \{(x,y)\ /\ 0\le y\le 1,\ y\le x\le 1\}$. pero esto NO es formal, pero de ahora en adelante será lo "clásico".

P2 a) $A\subset\mathbb{R}^3$, $A\subset R\times[a,b]$, $R\subset\mathbb{R}^2$, $[a,b]\subset\mathbb{R}$.

$A_t=\{x\in\mathbb{R}^2\ /\ (x,t)\in A\}$ medible $\forall t\in[a,b]$.

$A(t) := \text{Área}(A_t)$



Pdq $\displaystyle \mathrm{Vol}(A)=\int_a^b A(t)\,dt$.

Dem. Notar que $\displaystyle \mathrm{Vol}(A)=\iiint_A 1$

$$=\iiint_{R\times[a,b]} \mathbb{1}_A \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{[a,b]}\left(\iint_R \mathbb{1}_{A_t}\right) = \int_a^b\left(\iint_{A_t} 1\right) = \int_a^b \text{Área}(A_t)\,dt$$

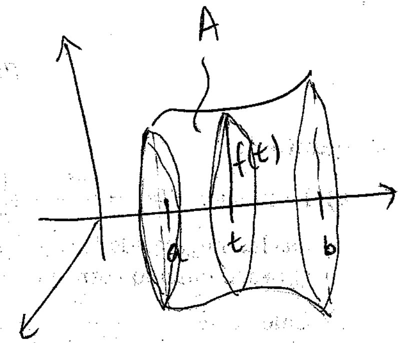
$$=\int_a^b A(t)\,dt.$$

b) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ cont y posit

$A=$ Conj. de $\mathbb{R}^3$ obtenido al rotar en torno a OX el gráfico de f.

Pdq: $\text{Vol}(A)=\displaystyle\int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx$

Sol. Hagamos un dibujo para aplicar lo anterior:

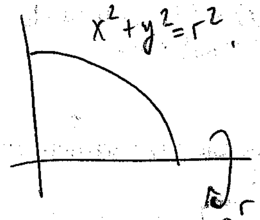


Notar que A_t en este caso es ~~...~~ un círculo de radio $f(t)$

$$\Rightarrow\ A_t=\pi(f(t))^2$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Parte anterior}}}{\Rightarrow}\ \boxed{V=\int_a^b \pi(f(x))^2\,dx}$$

En el caso de una esfera



$x^2+y^2=r^2$. ¿Quién es f? $\Rightarrow f=\sqrt{r^2-x^2}$ $\quad x\in[0,r]$

Por simetría $V_{esf}=2\displaystyle\int_0^r \pi(f(x))^2\,dx = 2\pi\int_0^r (r^2-x^2)\,dx = 2\pi\left(r^3-\frac{x^3}{3}\Big|_0^r\right)$

$$\boxed{V_{esf}=\frac{4\pi r^3}{3}}$$

P3 a) Pdq: $F(x)=\displaystyle\int_a^b g(x,t)\,dt$ satisf: $F'(x)=\displaystyle\int_a^b \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,dt$

Consideremos: $\displaystyle\int_c^x\int_a^b \frac{\partial g}{\partial x}(s,t)\,dt\,ds \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Fubini}}}{=} \int_a^b\int_c^x \frac{\partial g}{\partial x}(s,t)\,ds\,dt$

Luego: $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\int_c^x\int_a^b \frac{\partial g}{\partial x}(s,t)\,dt\,ds\right) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^b \underbrace{\int_c^x \frac{\partial g}{\partial x}(s,t)\,ds}_{\text{TFC}}\,dt\right)$

1TFC. ¡va!

$$\int_a^b \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^b (g(x,t)-g(c,t))\,dt\right) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^b g(x,t)\,dt\right) - \underbrace{\frac{d}{dx}\left(\int_a^b g(c,t)\,dt\right)}_{=0}$$

¡no dep de x!

y se concluye este caso :)

b) Queremos calcular $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$

b.1) $A(t) = \left(\int_0^t e^{-x^2}\,dx\right)^2 \qquad B(t) = \int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}\,dx$

Probemos que $A'(t)+B'(t)=0$.

$$A'(t) = \frac{d}{dt}\left(\int_0^t e^{-x^2}\,dx\right)^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CDif!}}}{=} 2\int_0^t e^{-x^2}\,dx \cdot \frac{d}{dt}\int_0^t e^{-x^2}\,dx = 2e^{-t^2}\cdot\int_0^t e^{-x^2}\,dx.$$

Para derivar $B(t)$ se usa la parte a) pues:

$$B(t) = \int_0^1 g(x,t)\,dx \Rightarrow B'(t) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial t}(x,t)\,dx, \text{ pero } \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}\right) = -2t\cancel{(1+x^2)}\frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{\cancel{1+x^2}} = -2te^{-t^2(1+x^2)}$$

$$\Rightarrow B(t) = \int_0^1 -2te^{-t^2(1+x^2)}\,dx = 2e^{-t^2}\int_0^1 -te^{-x^2t^2}\,dx$$

Sea $u = tx \Rightarrow du = t\,dx$

$$= -2e^{-t^2}\int_0^t e^{-x^2}\,dx = -A'(t)$$

$\therefore A'(t)+B'(t)=0$

b.2) Como $A'(t)+B'(t)=0 \Rightarrow A(t)+B(t)=cte$.

pero $\lim_{t\to 0} A(t) = 0$ y $\lim_{t\to 0} B(t) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg}(1) - \cancel{\operatorname{arctg}(0)}^{0} = \pi/2$.

$\therefore \underbrace{\cancel{A(0)}}_{0} + \underbrace{B(0)}_{\pi/2} = cte \Rightarrow cte = \pi/2 \Rightarrow A(t)+B(t) = \pi/2 \ \forall t$.

b.3) Probemos que $\lim_{t\to\infty} B(t) = 0$, pues, notar que

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \frac{\pi}{4} - \underbrace{\lim_{t\to\infty} B(t)}$$

si es 0 ⇒ Tenemos el resultado por paridad.

Notar que: $$\frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2} \leq \frac{e^{-t^2(1+0)}}{1+x^2} = \frac{e^{-t^2}}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^{t} \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}dx \leq \int_0^{t} \frac{e^{-t^2}}{1+x^2}dt = e^{-t^2}(\underbrace{\arctg(t)}_{\downarrow \, \pi/2}) \xrightarrow{t\to\infty} 0 .$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} B(t) = 0 \checkmark$$

y ∴ $$\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}}$$