

Auxiliar 14 - Cálculo en Varias Variables

Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile

Miércoles 14 de Noviembre, 2012

Profesor de Cátedra: Jaime H. Ortega

Profesores Auxiliares: Anton Svensson - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1.

- a) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$. Pruebe que se tiene:

$$\iiint_{\mathcal{D}} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dx dy dz = 4\pi \int_0^R f(r) r^2 dr$$

deduzca que el volumen de una esfera de radio R es $\frac{4}{3}\pi R^3$.

- b) Considere el elipsoide $\mathcal{E} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$. Pruebe que su volumen es $\frac{4}{3}\pi abc$.
Indicación: Busque una transformación que lleve una bola en un elipsoide.

- c) Calcule el volumen de la región $\mathcal{S}$ descrita por:

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2, x^2 + y^2 \leq z^2, z \geq 0, 0 < a < b\}$$

Pregunta 2.

- a) Dados $a, b, c > 0$, muestre que el volumen del tetraedro de vértices $(0, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ y $(0, 0, c)$ es:

$$\text{Vol}(T) = \frac{1}{6}abc$$

- b) Sea

$$I = \int_0^1 \int_w^1 \int_y^1 \sin(x^3) dx dy dw$$

Escriba I como una integral iterada de la forma $\iiint \dots dy dx dw$ y deduzca que:

$$I = \int_0^1 \int_w^1 (x - w) \sin(x^3) dx dw$$

Escriba la integral resultante como $\iint \dots dw dx$ y calcule I .

Pregunta 3.

- a) Calcule

$$\iiint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy dz$$

donde $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

- b) Calcule, usando coordenadas cilíndricas:

$$\iiint_B z dx dy dz$$

donde B es la región que queda dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, sobre el plano horizontal $z = 0$ y debajo del cono $z^2 = x^2 + y^2$.

Pregunta 4. Sea $f : \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y positiva. Se sabe que la integral $\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy$ se puede escribir como la integral iterada $\int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) dy dx$. Esboce la región $\mathcal{D}$ e intercambie el orden de integración en la integral iterada.