Auxiliar 10 - CVV - 2012/2 - Prof: J. Ortega

Aux.: M. Godoy

P1 a) f continua en $R \subset \mathbb{R}^2$. Pdq $\left(\min\limits_{(x,y)\in R} f(x,y)\right) A(R) \leq \iint\limits_R f \leq \left(\max\limits_{(x,y)\in R} f(x,y)\right) A(R)$

Sol. Sea la partición uniforme $R_n = \{R_{ij}\}_{ij}$ de n^2 rectángulos, sabemos que para cualquier suma de Riemann (osea, tomando $x_{ij} \in R_{ij}$ arbit.) se tiene:

$$\underbrace{I_{R_n}(f)}_{\sum\limits_{R_{ij}\in R_n} m_{R_{ij}}(f)\cdot A(R_{ij})} \leq \sum_{R_{ij}\in R_n} f(x_{ij})\cdot A(R_{ij}) \leq \underbrace{S_{R_n}(f)}_{\sum\limits_{R_{ij}\in R_n} M_{R_{ij}}(f)\cdot A(R_{ij})}$$

pero $m_{R_{ij}}(f) = \min\limits_{(x,y)\in R_{ij}} f(x,y) \underset{R_{ij}\subset R\ \forall ij}{\geq} \min\limits_{(x,y)\in R} f(x,y) \wedge M_{R_{ij}}(f) = \max\limits_{(x,y)\in R_{ij}} f(x,y) \leq \max\limits_{(x,y)\in R} f(x,y)$.

Obs. Como f es continua se usa min/max en vez de sup/inf

$$\therefore \min_{(x,y)\in R} f(x,y) \underbrace{\sum_{R_{ij}\in R_n} A(R_{ij})}_{A(R)} \leq I_{R_n}(f) \leq \sum_{R_{ij}\in R_n} f(x_{ij}) A(R_{ij}) \leq S_{R_n}(f) \leq \max_{(x,y)\in R} f \underbrace{\sum_{R_{ij}\in R_n} A(R_{ij})}_{A(R)}$$

Ahora, como f es cont en $R \Rightarrow f$ es integ en $R \Rightarrow I_{R_n}(f), S_{R_n}(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} \iint\limits_R f$

$$\therefore \min_{(x,y)\in R} f(x,y)\cdot A(R) \leq \iint\limits_R f \leq \max_{(x,y)\in R} f(x,y)\cdot A(R)$$ que era lo deseado.

b) $f(x,y) = e^{\sin(x+y)}$ $\quad R = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$.

Veamos que $\dfrac{1}{e} \leq \dfrac{1}{4\pi^2} \displaystyle\int_R f \leq e$

<u>Sol</u>. Como $(x,y) \in R \Rightarrow$ $x+y$ varía ~~entre~~ en $[-2\pi, 2\pi]$.

$\therefore \min\limits_{(x,y)\in R} \sin(x+y) = -1 \quad \max\limits_{(x,y)\in R} \sin(x+y) = 1$.

ahora la exp. (1D) es creciente y cont $\therefore \min\limits_{(x,y)\in R} e^{\sin(x+y)} = e^{-1}$

$\max\limits_{(x,y)\in R} e^{\sin(x+y)} = e$

$\therefore$ por a): $\quad e^{-1} \cdot A(R) \leq \displaystyle\int_R f \leq e \cdot A(R) \quad$ pero $A(R) = (2\pi)^2 = 4\pi^2$

$$\therefore \quad \frac{1}{e} \leq \frac{1}{A(R)} \int_R f \leq e$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{e} \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_R f \leq e$$

<u>P2</u> a) U abto de $\mathbb{R}^3$, $p \in U$. Sea g cont en U. $V_r = \mathrm{Vol}(B(x,r))$

<u>Pdq</u> $\quad g(p) = \lim\limits_{r \to 0} \dfrac{1}{V_r} \displaystyle\int_{B(p,r)} g$

<u>Sol</u>. Notar que, dado r fijo, primero: $\quad g(p) = g(p) \cdot 1 \overset{\text{ind}}{=} g(p) \displaystyle\int_{B(p,r)} \frac{1}{V_r}\, dx$

$= \dfrac{1}{V_r} \displaystyle\int_{B(p,r)} g(p)\, dx \quad$ (entiendase dx vectorial esea $dx = dV$)

Luego, queremos probar que:

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{V_r} \int_{B(p,r)} g(p)-g(x)\,dx = 0.$$

Para ello, notemos que como f es cont. en $U \Rightarrow$ es cont. en $p \in U$.
lo que por def es equiv. a: Dado $\varepsilon>0$ $\exists\ \delta>0$ tq si $\|x-p\|<\delta$

$$\Rightarrow \|g(x)-g(p)\| < \varepsilon. \quad (*)$$

Luego, si tomamos $r<\delta$ de la continuidad, se tiene:

$$\left|\frac{1}{V_r}\int_{B(p,r)} g(p)-g(x)\,dx\right| \leq \frac{1}{V_r}\int_{B(p,r)} |g(p)-g(x)|\,dx \overset{(*)}{\leq} \frac{1}{V_r}\int_{B(p,r)} \varepsilon\,dx = \frac{\varepsilon}{V_r}\int_{B(p,r)} 1\,dx$$

$$= \varepsilon.$$

$\therefore$ $\forall \varepsilon>0$ $\exists\ \delta>0$ tq si $0<r<\delta$:

$$\left|\frac{1}{V_r}\int_{B(p,r)} g(p)-g(x)\,dx\right| \leq \varepsilon$$

$$\parallel$$

$$\left|g(p)-\frac{1}{V_r}\int_{B(p,r)} g(x)\,dx\right|$$

$$\Rightarrow \lim_{r\to 0}\frac{1}{V_r}\int_{B(p,r)} g(x)\,dx = g(p)$$

que era lo deseado.

b) Notar que, como f es continua $\Rightarrow$ es integrable.

S_n es un reticulado tq $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} R$ (Es el reticulado uniforme!)

$S_n^*(f)$ es una suma de Riemann particular (tomo $f(x_{ij})$ con x_{ij} el extremo derecho del intervalo asociado)

reemplazo $f(x_{ij})$ por $\min\limits_{\vec{x} \in R_{ij}} f(x,y)$ — reemplazo $f(x_{ij})$ por el máx.

Luego: $I_{S_n}(f) \leq S_n^*(f) \leq S_{S_n}(f)$

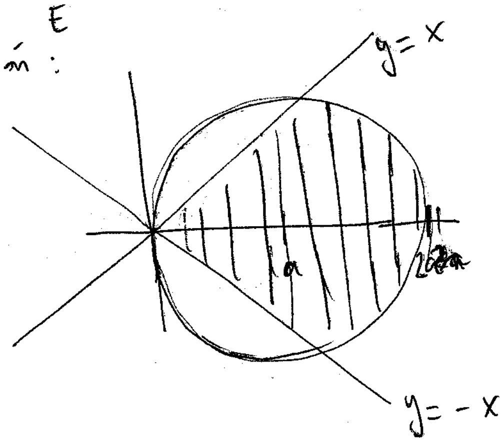
y como f es integ: $\lim\limits_n I_{S_n}(f) = \lim\limits_n S_{S_n}(f) = \int_R f$

$\therefore$ Por Sandwich: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^*(f) = \int_R f$

D

P3 a) Queremos $\iint_E \sqrt{x^2+y^2}\, dA$ $\quad E =$ disco $(x-a)^2+y^2 \leq a^2 \cap |y| \leq x$.

Dibujemos la región:



En polares:

$(x-a)^2+y^2 \leq a^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2ax + \cancel{a^2} + y^2 \leq \cancel{a^2}$

$0 \leq x^2+y^2 \leq 2ax$

$0 \leq \rho^2 \leq 2a\rho\cos\theta$

$0 \leq \rho \leq 2a\cos\theta$.

Luego: $\iint_E \sqrt{x^2+y^2}\, dA \overset{TCV}{=} \iint_R f(\rho\cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta)\,\underbrace{|Jac\, T|}_{\rho}\, d\rho\, d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^{2a\cos\theta} \rho \cdot \rho\, d\rho\, d\theta$.

$T(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)$

$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{8a^3}{3} \operatorname{sen}^3\theta\, d\theta \overset{\text{Respuesta}}{=} \frac{8a^3}{3}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{sen}^3\theta\, d\theta$

Notar que $\int \operatorname{sen}^3\theta \, d\theta = \int \underbrace{\operatorname{sen}^2\theta}_{(1-\cos^2\theta)} \operatorname{sen}\theta \, d\theta \overset{\uparrow}{=} -\int (1-u^2)\,du = -u + \frac{u^3}{3} + C$ 5/10

$= \frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta + C$

$u = \cos\theta$

$du = -\operatorname{sen}\theta$.

$$\therefore \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{sen}^3\theta \, d\theta = \frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 2\left(\frac{\frac{2\sqrt{2}}{8}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left(\frac{6\sqrt{2}}{8} - \frac{4\sqrt{2}}{8}\right) = 2\frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \iint_E \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \frac{8a^3}{3} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{sen}^3\theta \, d\theta = \frac{\cancel{8}^{4} a^3}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \frac{4a^3}{3} \ //$$

b) b.1) $I \cdot I = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy\right) = \lim_{R\to\infty} \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2} dx\right)\left(\int_{-R}^{R} e^{-y^2} dy\right)$

$= \lim_{R\to\infty} J(R)$

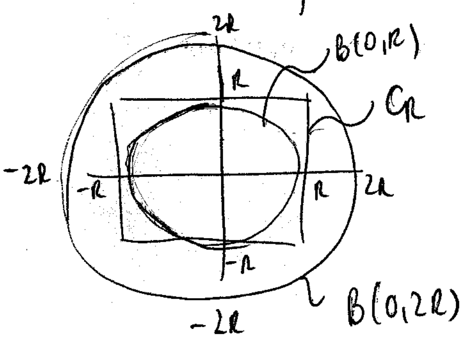
b.2) Notemos primero que:

$$J(R) = \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2} dx\right) \cdot \left(\int_{-R}^{R} e^{-y^2} dy\right) = \left(\int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R} e^{-(x^2+y^2)} dx\,dy\right)$$

Por Fubini esta última integral (iterada) es igual a: $\iint_{C_R} e^{-(x^2+y^2)} dx\,dy$ integral en $\mathbb{R}^2$!

con $C_R = [-R,R] \times [-R,R]$.

notemos que (ver dibujo) $B(0,R) \subset C_R \subset B(0,2R)$



y como $e^{-(x^2+y^2)} \geq 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Entonces:

$$\iint_{B(0,R)} e^{-(x^2+y^2)} dx\,dy \leq J(R) \leq \iint_{B(0,2R)} e^{-(x^2+y^2)} dx\,dy$$

pero notemos que las integrales en $B(0,R)$ y $B(0,2R)$ se pueden calcular aprovechando que son fácilmente expresables en coordenadas polares, en efecto:

$$B(0,R) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x^2+y^2 \leq R^2\} \overset{\text{Polares}}{=} \{(r,\theta) / \; \rho \leq R, \; \theta \in [0,2\pi]\}$$

$$= \underbrace{\{(r,\theta) / \; \rho \in [0,R], \; \theta \in [0,2\pi]\}}_{\text{rectangulo!}}$$

$\therefore$ Por TCV: $$\iint_{B(0,R)} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} e^{-\rho^2} \cdot \rho \, d\rho \, d\theta$$

Análogamente: $$\iint_{B(0,2R)} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{2R} e^{-\rho^2} \cdot \rho \, d\rho \, d\theta$$

Notemos que $\left(-\frac{1}{2} e^{-\rho^2}\right)' = \rho e^{-\rho^2}$

$$\therefore \iint_{B(0,R)} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} \rho e^{-\rho^2} d\rho \, d\theta = 2\pi \left(-\frac{1}{2} e^{-\rho^2}\right)\Big|_0^R$$

$$= \pi (1 - e^{-R^2})$$

Análogamente $$\iint_{B(0,2R)} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \pi (1 - e^{-4R^2})$$

$$\therefore \pi(1-e^{-4R^2}) \leq J(R) \leq \pi(1-e^{-R^2}) \quad \forall R > 0$$

$$\therefore \underbrace{\lim_{R\to\infty} \pi(1-e^{-4R^2})}_{= \pi} \leq \lim_{R\to\infty} J(R) \leq \underbrace{\lim_{R\to\infty} \pi(1-e^{-R^2})}_{= \pi}$$

Como $\lim_{R \to \infty} J(R) = I^2$

Entonces $\pi \leq I^2 \leq \pi \Rightarrow I^2 = \pi \Rightarrow I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\cancel{t}x^2} dx = \sqrt{\pi}$

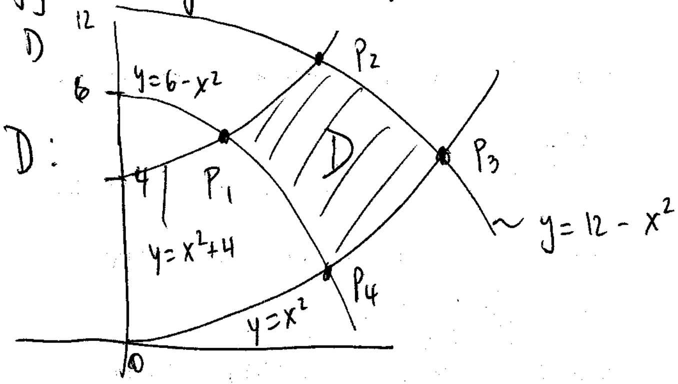
b.3) Finalmente como e^{-x^2} es par, se concluye que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

P4 a) $\iint_D xy\,dx\,dy$ D: reg. delim. por: $y = x^2+4$, $y = x^2$, $y = 6-x^2$
$y = 12 - x^2$.

gráfico D:



P_1: $\cap$ de $y = x^2+4 \wedge y = 6-x^2$
$\Rightarrow 2y = 10 \Rightarrow y = 5$
$\Rightarrow x = 1$

$P_1 = (1,5)$

P_2: $\cap$ de $y = 12-x^2 \wedge y = 4+x^2 \Rightarrow 2y = 16 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow P_2 = (2,8)$

P_3: $\cap$ de $y = x^2 \wedge y = 12-x^2 \Rightarrow 2y = 12 \Rightarrow \left.\begin{matrix} y=6 \\ x=\sqrt{6}\end{matrix}\right\} \Rightarrow P_3 = (\sqrt{6}, 6)$

P_4: $\cap$ de $y = x^2 \wedge y = 6-x^2 \Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow y = 3$, $x = \sqrt{3} \Rightarrow P_4 = (\sqrt{3}, 3)$

$D = \{(x,y) \,/\, y \geq x^2 \wedge y \leq x^2+4 \wedge y \geq 6-x^2 \wedge y \leq 12-x^2\}$

Si consideramos $y = x^2 + u$, $y = v - x^2$ con $u \in [0,4]$, $v \in [6,12]$

entonces la transf. asociada lleva $(u,v) \longrightarrow (x,y)$ $\quad R = [0,4]\times[6,12]$

$R \longmapsto D$

¿Cual es la transf? basta despejar u, v: sumando: $2y = u+v \Rightarrow y = \frac{u+v}{2}$

$\Rightarrow \frac{u+v}{2} = x^2 + u \Rightarrow x = \sqrt{\frac{v-u}{2}}$

Así: $T(u,v) = \left(\sqrt{\frac{v-u}{2}}, \frac{u+v}{2}\right)$ es la transf. tq $T(R) = D$

Obs. Esta función está def en ~~[illegible]~~ R, es C^∞ e inyectiva ahí. (notar que en R siempre $v > u$)

$\Rightarrow$ vale TCV

$\therefore \iint_D xy\,dx\,dy = \iint_{T^{-1}(D)} \sqrt{\frac{v-u}{2}}\left(\frac{u+v}{2}\right)|\det JT|\,du\,dv$

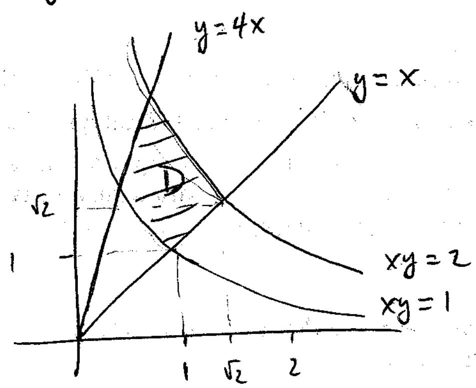
pero ~~de~~

$$JT = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{v-u}} & -\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{v-u}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow |\det JT| = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{v-u}}$$

$$\therefore \iint_{T^{-1}(D)} \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{v-u}\,(v+u)\,\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{v-u}}\, du\, dv = \frac{1}{8}\int_6^{12}\int_0^4 (u+v)\, du\, dv \underset{\substack{\uparrow \\ \text{calcular!}}}{=} 33$$

b) Calculemos ahora: $\iint_D x^2y^2\,dx\,dy$ D está acotado por $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x \wedge y = 4x$.

Dibujemos la región D:



Es claro que integrar directamente en esta región no es una "buena idea". Hay que buscar una transf. "ad-hoc" para traducir el Pb. a una integración "fácil".

Del dibujo además se deduce que:

$$D = \{(x,y) \mid xy \le 2,\ xy \ge 1,\ y \ge x \wedge y \le 4x\}.$$

$$= \{(x,y) \mid 1 \le xy \le 2,\ 1 \le \frac{y}{x} \le 4\}$$ ← esta forma de describir D sugiere el cambio de variables!

En efecto, si consideramos $xy = u$, $\frac{y}{x} = v$, entonces, en términos de (u,v)

$\overline{D'} = \{(u,v) \mid 1 \le u \le 2,\ 1 \le v \le 4\}$ un rectángulo! (con $D' = \{(u,v) \mid 1<u<2,\ 1<v<4\}$ abierto.)

Así pues, debemos encontrar la Transf. asociada y ver que satisface el TCV:

$$\left.\begin{array}{l} xy = u \Rightarrow x = \frac{u}{y} \\ \frac{y}{x} = v \Rightarrow y = vx \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = \frac{u}{v} \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{\frac{u}{v}}} \Rightarrow \sqrt{\frac{u}{v}}\, y = u \Rightarrow \boxed{y = \sqrt{uv}}$$

$\therefore$ Si definimos $T: (0,+\infty) \times (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2_+$

$$(u,v) \longmapsto \left(\sqrt{\frac{u}{v}},\ \sqrt{uv}\right)$$

Se tiene que : • $T(D') = D$ $\qquad$ 10/10

• T es inyectiva ← verificar por definición! y C^∞ donde está def, en partic. en D'.

$\therefore$ Por TCV: tendríamos $\displaystyle\iint_{D=T(D')} \overbrace{x^2y^2}^{f(x,y)}\,dx\,dy = \iint_{D'} f(T(u,v))\cdot|\det T'|\,du\,dv.$

para tener TCV basta ver que $\det T' \neq 0 \;\; \forall (u,v)\in D'$.

En efecto, por un lado $T'(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{1/v}{2\sqrt{u/v}} & \dfrac{-u/v^2}{2\sqrt{u/v}} \\ \dfrac{v}{2\sqrt{uv}} & \dfrac{u}{2\sqrt{uv}} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow |\det T'(u,v)| = \dfrac{1}{2v}\sqrt{\dfrac{v}{u}}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{u}{\sqrt{uv}} + \dfrac{uv}{4\sqrt{uv}}\cdot\sqrt{\dfrac{v}{u}}$

$= \dfrac{1}{4v} + \dfrac{1}{4v} = \dfrac{1}{2v} \neq 0$ en D' (de hecho en $\bar{D}'$)

$\therefore$ Vale TCV: $\displaystyle\iint_D x^2y^2\,dx\,dy = \iint_{D'} f\left(\sqrt{\tfrac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right)\cdot\frac{1}{2v}\,du\,dv$

$\displaystyle = \iint_{D'} \frac{u}{\cancel{v}}\cdot u\cancel{v}\cdot\frac{1}{2v}\,du\,dv$

$\displaystyle = \int_1^4\int_1^2 \frac{u^2}{2v}\,du\,dv \overset{\text{verificar}}{=} \frac{7}{3}\ln 2.$