Auxiliar 10 - Cálculo en Varias Variables
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Lunes 12 de Noviembre, 2012

Profesor de Cátedra: Jaime H. Ortega
Profesores Auxiliares: Anton Svensson - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1.

a) Sea f una función continua sobre un rectángulo $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$. Demuestre que:

$$\left(\min_{(x,y)\in\mathcal{R}} f(x,y)\right) \cdot A(\mathcal{R}) \leq \int_{\mathcal{R}} f \leq \left(\max_{(x,y)\in\mathcal{R}} f(x,y)\right) \cdot A(\mathcal{R})$$

Indicación: Use sumas inferiores y superiores de Riemann.

b) Si $f(x,y) = e^{\sin(x+y)}$ y $\mathcal{R} = [-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi]$, muestre que:

$$\frac{1}{e} \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathcal{R}} f \leq e$$

Pregunta 2.

a) Sea U un abierto en $\mathbb{R}^3$ y sea $p \in U$. Sea g una función continua en U. Sea V_r el volumen de una bola de radio r. Sea $B(p,r)$ la bola centrada en p y de radio r. Pruebe que se tiene:

$$g(p) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{V_r} \int_{B(p,r)} g$$

Indicación: Recuerde que: $\displaystyle\int_{B(p,r)} 1 = V_r$

b) Sea $\mathcal{R} = [a_1,b_1] \times \ldots \times [a_N,b_N] \subset \mathbb{R}^N$ un rectángulo, y sea S_n un reticulado dado por la familia de rectángulos de la forma

$$R_{k_1\ldots k_N} = \left[a_1 + \frac{(k_1-1)(b_1-a_1)}{n}, a_1 + \frac{k_1(b_1-a_1)}{n}\right] \times \ldots \times \left[a_N + \frac{(k_N-1)(b_N-a_N)}{n}, a_N + \frac{k_N(b_N-a_N)}{n}\right]$$

donde $k_j = 1,\ldots,n$ para $j = 1,\ldots,N$.
Para una función continua $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ definamos:

$$S_n^*(f) = \sum_{k_1,\ldots,k_N=1}^{n} f\left(a_1 + \frac{k_1(b_1-a_1)}{n}, \ldots, a_N + \frac{k_N(b_N-a_N)}{n}\right) \cdot Vol(R_{k_1\ldots k_N})$$

Demuestre que:

$$\lim_{n\to\infty} S_n^*(f) = \int_{\mathcal{R}} f$$

Pregunta 3.

a) Calcule

$$\iint_E \sqrt{x^2+y^2}\,dA$$

donde E es la intersección del disco $(x-a)^2 + y^2 \leq a^2$ donde $a > 0$ y la región $|y| \leq x$.

b) En la auxiliar anterior probamos que mediante la regla de derivación de Leibniz el importante resultado:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Probaremos este resultado de forma alternativa, para ello siga los siguientes pasos:

b.1) Sea I la integral deseada, considere I^2 y escríbalo como un límite.
b.2) Usando el Teorema de Fubini y el de Cambio de Variable apropiadamente determine el valor de I^2.
b.3) Concluya el resultado deseado.

Pregunta 4.

a) Calcule la integral

$$\iint_{\mathcal{D}} xy\,dx\,dy$$

donde $\mathcal{D}$ es la región delimitada por las parábolas: $y = x^2 + 4$, $y = x^2$, $y = 6 - x^2$ y $y = 12 - x^2$.

b) Calcule la integral

$$\iint_{\mathcal{D}} x^2y^2\,dx\,dy$$

donde $\mathcal{D}$ es la región delimitada por las hipérbolas: $xy = 1$, $xy = 2$ y las líneas rectas $y = x$, $y = 4x$.