Auxiliar 12 - Cálculo en Varias Variables
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Miércoles 31 de Octubre, 2012

Profesor de Cátedra: Jaime H. Ortega
Profesores Auxiliares: Anton Svensson - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1.

a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función integrable. Considere la región

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$$

Pruebe que:

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x,y)dx$$

b) Calcule la integral iterada

$$\int_0^1 \left(\int_y^1 \frac{\sin x}{x} dx \right) dy$$

Pregunta 2.

a) Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^3$, con $A \subset R \times [a,b]$, donde $R \subset \mathbb{R}^2$ y $[a,b] \subset \mathbb{R}$ son intervalos. Suponga que:

$$A_t = \{x \in \mathbb{R}^2 :\ (x,t) \in A\} \subset \mathbb{R}^2$$

es medible para cada $t \in [a,b]$, escribamos $A(t) = \text{Área}(A_t)$. Entonces:

$$\text{Volumen}(A) = \int_a^b A(t)dt$$

Este resultado se conoce como el 'Principio de Cavalieri'.

b) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y positiva. Sea A el conjunto de $\mathbb{R}^3$ obtenido al rotar en torno al eje OX el gráfico de f. Pruebe que:

$$\text{Volumen}(A) = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Deduzca de esto que el volumen de una esfera es $4/3\pi r^3$.

Pregunta 3. El propósito de esta pregunta es probar la llamada regla de Leibniz, que dice: dada $g(x,y)$ de clase $\mathcal{C}^1$, se tiene que la derivada de la función de una variable:

$$F(x) = \int_a^b g(x,t)dt \quad \text{es} \quad F'(x) = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\, dt.$$

Para probar esto se propone lo siguiente:

a) Considere la siguiente integral iterada:

$$\int_c^x \int_a^b \frac{\partial g}{\partial x}(s,t)dtds$$

y utilizando el Teorema de Fubini más el Teorema Fundamental del Cálculo concluya.

b) Una aplicación clásica de este resultado es el cálculo de integrales de una variable de funciones que no poseen primitiva en términos de funciones elementales (recuerden que TODA función continua de una variable posee primitiva!). Por ejemplo, para calcular:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Siga los siguientes pasos:

b.1) Considere las funciones:

$$A(t) = \left(\int_0^t e^{-x^2} dx \right)^2 \quad B(t) = \int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2} dx$$

Pruebe que estas satisfacen: $A'(t) + B'(t) = 0$

b.2) Deduzca que $A(t) + B(t) = \pi/4$
b.3) Pruebe que $\lim_{t \to \infty} B(t) = 0$ y concluya el resultado.

Pregunta 4.

a) Calcule la integral

$$\iint_{\mathcal{D}} xydxdy$$

donde $\mathcal{D}$ es la región delimitada por las parábolas: $y = x^2 + 4$, $y = x^2$, $y = 6 - x^2$ y $y = 12 - x^2$.

b) Calcule la integral

$$\iint_{\mathcal{D}} x^2y^2dxdy$$

donde $\mathcal{D}$ es la región delimitada por las hipérbolas: $xy = 1$, $xy = 2$ y las líneas rectas $y = x$, $y = 4x$.