

Pauta Pregunta 2 Control 2 - Cálculo en Varias Variables

Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile

Miércoles 10 de Octubre, 2012

Profesores de Cátedra: Jaime H. Ortega - Natacha Astromujoff

Profesores Auxiliares: Anton Svensson - Matías Godoy Campbell - Simón Piga

Pregunta 2.

Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}xy.$$

y el conjunto

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 1\}.$$

Encuentre los puntos donde f alcanza sus valores máximos y mínimos en S . Justifique su respuesta.

(6 ptos.)

Solución: Antes de cualquier cosa hay que notar que los puntos solicitados existen, esto gracias a que f claramente es continua (es un polinomio en $\mathbb{R}^2$) y el conjunto S es cerrado y acotado, en efecto:

1. S es acotado: Basta notar que S es el conjunto de los puntos que están encerrados por la elipse de ecuación $x^2 + 2y^2 = 1$.
2. S es cerrado: Basta notar que S es la preimagen de un cerrado a través de una función continua: $S = g^{-1}([-1, 0])$ con $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 1$ que es obviamente continua.

Luego, S es compacto, y por teorema f alcanza sus máximos y mínimos en S .

Para analizar estos puntos, tal como se dijo en el control, lo mejor es estudiar por separado los conjuntos S_1 y S_2 dados por:

$$S_1 = \{(x, y) \mid x^2 + 2y^2 < 1\}, \quad S_2 = \{(x, y) \mid x^2 + 2y^2 - 1 = 0\}$$

Notar que S_1 es un conjunto abierto, luego para este valen los criterios de primer y segundo orden para conjuntos abiertos que conocemos. Para S_2 , como es un conjunto dado por una restricción de igualdad de una función diferenciable, basta utilizar el Teorema de los multiplicadores de Lagrange.

Análisis de f en S_1 :

Condición de primer orden: $\nabla f(x, y) = 0$, nos da las ecuaciones:

$$2x + 2\sqrt{2}/3y = 0, \quad 2y + 2\sqrt{2}/3x = 0$$

cuya única solución es $(x, y) = (0, 0)$.

Condición de segundo orden: Debemos estudiar si $f''(0, 0)$ es definida positiva, negativa, o ninguna de ellas, al calcular $f''(x, y)$ se obtiene:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2}/3 \\ 2\sqrt{2}/3 & 2 \end{pmatrix}$$

que posee valores propios: $\lambda_1 = 2 + 2\sqrt{2}/3$ y $\lambda_2 = 2 - 2\sqrt{2}/3$, como ambos son positivos, se concluye que en $(0, 0) \in S_1$ existe un mínimo local para f .

Análisis de f en S_2 :

Notar que el Lagrangeano asociado al problema es

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}/3xy - \lambda(x^2 + 2y^2 - 1)$$

Condición de primer orden: $\lambda \mathcal{L}(x, y, \lambda) = 0$, nos da las ecuaciones:

$$2x + 2\sqrt{2}/3y - 2\lambda x = 0, \quad 2y + 2\sqrt{2}/3x - 4\lambda y = 0, \quad x^2 + 2y^2 - 1 = 0$$

Hay varias formas posibles de determinar la solución, se debe tener mucho cuidado pues es MUY fácil equivocarse, aquí se adjunta una opción de desarrollo:

De la segunda ecuación es posible despejar λ como:

$$\lambda = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{6} \frac{x}{y}$$

reemplazando en la primera ecuación queda:

$$3xy - \sqrt{2}x^2 + 2\sqrt{2}y^2 = 0$$

luego, reemplazando, desde la tercera ecuación $y = \pm\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}$ en esta última, quedan las siguientes dos ecuaciones en x :

$$\pm 3x\sqrt{\frac{1-x^2}{2}} = 2\sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}$$

elevando al cuadrado, lleva a la ecuación:

$$25x^4 - 25x^2 + 4 = 0$$

que bajo el reemplazo $u = x^2$ queda como:

$$25u^2 - 25u + 4 = 0$$

ecuación cuyas soluciones son $u_1 = 4/5$ y $u_2 = 1/5$, luego, hay cuatro posibles valores para x :

$$x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad x_{3,4} = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

de la restricción de la Elipse, se deduce que:

$$y_{1,2} = \pm \frac{2}{\sqrt{10}}, \quad y_{3,4} = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Luego, EN PRINCIPIO, hay 8 puntos críticos (notese por cierto que aun no determinamos el valor de los multiplicadores):

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

Hay que tener SUMO cuidado con las soluciones encontradas, dado que elevamos al cuadrado, es posible que algunas soluciones NO satisfagan todas las ecuaciones necesarias, y en tal caso esos puntos NO serán puntos críticos, por ejemplo, consideremos el punto $(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{10})$, obviamente cumple la ecuación de la elipse, pero veamos las otras dos:

$$2x + 2\sqrt{2}/3y - \lambda x = 0 \Rightarrow \lambda = 5/3$$

$$2y + 2\sqrt{2}/3x - 2\lambda y = 0 \Rightarrow \lambda = 2/3$$

lo que es inconsistente, por lo que ese punto NO es solución del sistema.

De forma análoga se obtiene que los puntos críticos (con sus multiplicadores asociados) son los tríos (x, y, λ) tal que:

$$P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{1}{3}\right), \quad P_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{1}{3}\right), \quad P_3 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{7}{6}\right), \quad P_4 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{7}{6}\right)$$

Se tiene además que:

$$f(P_1) = f(P_2) = \frac{1}{3} < f(P_3) = f(P_4) = \frac{35}{30}$$

En este punto ya es posible afirmar que en $(0,0)$ se alcanza el mínimo global en S (pues sabemos que existe, dado que existe debe cumplir condiciones de primer orden (para el problema en S_1 o en S_2) y dentro de todos los puntos críticos posibles, es el que entrega el menor valor).

De la misma forma, es posible concluir que en P_3 y P_4 se alcanzan los máximos globales en S .

Para concluir que P_1 y P_2 son mínimos en S_2 hay dos opciones, una es notar que S_2 también es un compacto, luego se alcanza el mínimo en este conjunto, y ese mínimo debe cumplir su condición de primer orden asociada al Lagrangeano, y por tanto, P_1 y P_2 son los mínimos valores en S_2 que cumplen esta condición.

La otra opción, más tediosa, es verificar mediante el criterio de segundo orden para el Lagrangeano, que estos puntos son mínimos, notar que en tal caso, la matriz $H_x\mathcal{L}$ solo depende de λ :

$$H_x\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f''(x, y) + \lambda g''(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + 2\lambda & 2\sqrt{2}/3 \\ 2\sqrt{2}/3 & 2 + 4\lambda \end{pmatrix}$$

luego:

$$H_x\mathcal{L}(P_1) = H_x\mathcal{L}(P_2) = \begin{pmatrix} 8/3 & 2\sqrt{2}/3 \\ 2\sqrt{2}/3 & 10/3 \end{pmatrix}$$

cuyos valores propios son positivos, por lo tanto la matriz es definida positiva para todo punto (en particular para el conjunto de direcciones críticas), y por tanto se puede asegurar que estos puntos son mínimos en el conjunto S_2 , como se había planteado anteriormente.

Como comentario adicional, también es posible probar con criterio de segundo orden para el Lagrangeano que P_3 y P_4 son máximos en S_2 (y por tanto en todo S), en tal caso, los valores propios de la matriz asociada (que, se insiste nuevamente en que solo dependen del multiplicador, que en este caso es $\lambda = 7/6$), dan negativos y por tanto la matriz es definida negativa para todo punto.

En conclusión:

f alcanza sus máximos y mínimos en el compacto S , y corresponden a:

$$f(0,0) = \min_{(x,y) \in S} f(x,y) = 0, \quad f(P_1) = f(P_2) = \max_{(x,y) \in S} f(x,y) = \frac{35}{30}$$

además (no es requerido detallar esto), en S_2 hay un mínimo global (para ese conjunto):

$$f(P_3) = f(P_4) = \min_{(x,y) \in S_2} f(x,y) = \frac{1}{3}$$

Pauta de puntajes:

Afirmar existencia de máximos y mínimos: 0.5

Estudio de f en S_1 : 1.5

Estudio de f en S_2 : Condiciones de primer orden del Lagrangeano: Llegar al sistema 1.0, Obtener puntos críticos: 1.0 (Si obtienen puntos que NO son puntos críticos (osea, que no se excluyeron verificando las ecuaciones) se debe restar 0.5).

Caracterización de puntos críticos: Argumento de porque $(0,0)$ es el mínimo global en S : 0.5, Argumento de porque P_1 y P_2 son el máximo global en S : 1.0 (Puede ser con criterio de segundo orden o con el argumento de existencia dado en esta pauta).

Conclusión final: 0.5