Control 2 - Cálculo en Varias Variables
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Miércoles 10 de Octubre, 2012

Profesores de Cátedra: Jaime H. Ortega - Natacha Astromujoff
Profesores Auxiliares: Anton Svensson - Matías Godoy Campbell - Simón Piga

Pregunta 1.

a) Determine y clasifique los puntos críticos de la función de dos variables
$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2.$$
Además discuta si f posee máximos o mínimos globales.

(3 ptos.)

b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \sin(x+y) + e^y$

b.1) Mostrar que f es de clase $\mathcal{C}^2$ y encuentre su polinomio de Taylor de segundo orden $\mathcal{P}_2$ en torno al punto $(0, -\pi/2)$.

b.2) Muestre que f es de clase $\mathcal{C}^3$ y que para todo $(x,y) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + (y+\pi/2)^2 \leq 1\}$ se tiene que:
$$\left|\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(x,y)\right| < 1 + e^{1-\pi/2} \quad \forall i,j,k \in \{1,2\}$$

(3 ptos.)

Pregunta 2.

Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por
$$f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}xy.$$
y el conjunto
$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ x^2 + 2y^2 \leq 1\right\}.$$
Encuentre los puntos donde f alcanza sus valores máximos y mínimos en S. Justifique su respuesta.

(6 ptos.)

Pregunta 3.

a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ que satisface la ecuación:
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$
Muestre que una función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = g(u(x,y), v(x,y)) = g(x+y, x-y)$ satisface la ecuación:
$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = 0$$

(2 ptos.)

b) Recordemos que una función $||\cdot|| : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ se dice norma si satisface las condiciones siguientes: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ y $\forall x, y \in \mathbb{R}^N$:

$$\begin{aligned} ||\lambda x|| &= |\lambda| \cdot ||x|| \\ ||x+y|| &\leq ||x|| + ||y|| \\ ||x|| = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Diremos además que dos normas: $||\cdot||_\alpha$ y $||\cdot||_\beta$ son equivalentes si existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que:

$$C_1 ||x||_\alpha \leq ||x||_\beta \leq C_2 ||x||_\alpha \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

El propósito de este problema, es probar que en $\mathbb{R}^N$ **todas las normas son equivalentes**. Para ello, sea $||\cdot||$ una norma cualquiera y $||\cdot||_1$ la norma definida para todo $x \in \mathbb{R}^N$ por:

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{N} |x_i|$$

y siga los siguientes pasos:

a) Pruebe que $||\cdot||_1$ es una norma en $\mathbb{R}^N$

b) Notando que $x \in \mathbb{R}^N$ se puede descomponer como $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_N e_N$ con $e_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \ldots, 0)$ pruebe que

$$\|x\| \leq C_2 \|x\|_1$$

con $C_2 = \text{máx}_i \|e_i\|$

c) Pruebe que $\|\cdot\| : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es una función continua.
<u>Indicación:</u> Use la desigualdad triangular de forma apropiada para probar que

$$|\|x\| - \|y\|| \leq C \|x - y\|_1.$$

d) Para concluir, considere el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\|_1 = 1\}$. Argumente por qué este conjunto es compacto, y utilizando la parte anterior, concluya que existe C_1 tal que:

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

(4 ptos.)