Pauta Auxiliar 8 - CVV - 2012/2

Prof: J. Ortega
Aux: M. Godoy

P1) f cont. $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty$. Queremos probar que $\exists\ \underline{x} \in \mathbb{R}^N$ tq $f(\underline{x}) = \min_{x\in\mathbb{R}^N} f(x)$.

a) $J = \{x \in \mathbb{R}^N / f(x) \leq f(0)\}$ es cerrado y acotado:

1) J cerrado: Sea $(x_n)_n$ sucesión en J, tal que $x_n \to x$. Veamos que $x \in J$:

Como $x_n \in J\ \forall n \Rightarrow f(x_n) \leq f(0)\ \forall n$, como f es cont $f(x_n) \to f(x)$

$$\begin{array}{l} f(x_n) \leq f(0) \\ \downarrow n\to\infty \\ f(x) \leq f(0) \end{array}$$

la desig. se mantiene por def. de límite.

$\therefore x \in J \Rightarrow J$ es cerrado.

2) J acotado: Supongamos que J no es acotado, es decir $\forall n > 0\ \exists x \in J$ tq $\|x\| > n$.

pero notemos que $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall C > 0\ \exists N > 0$ tq si $\|x\| > N \Rightarrow f(x) > C$

así, basta tomar $C = f(0)$, pues en tal caso $\exists N > 0$ tq si $\|x\| > N \Rightarrow f(x) > f(0)$, como J no es acotado $\exists x \in J$ tq $\|x\| > N$

pero en tal caso: $x \in J \wedge f(x) > f(0)$
$\Leftrightarrow f(x) \leq f(0) \wedge f(x) > f(0)$ lo que es una contradicción.

$\therefore$ J es acotado.

Luego, J es cerrado y acotado $\Leftrightarrow$ J es compacto.

b) Notemos que f es cont. en $\mathbb{R}^N \Rightarrow$ f es cont en J compacto $\Rightarrow$ f alcanza su mínimo en J

Sea $\underline{x} \in J$ tq $f(\underline{x}) = \min_{x\in J} f(x)$. Probemos que este $\underline{x}$ es el que buscamos (osea, que $\underline{x}$ cumple $f(\underline{x}) = \min_{x\in\mathbb{R}^N} f(x)$)

Para ello, notemos que si $x \in J$: $f(\underline{x}) \leq f(x)$ ✓

si $x \notin J \Leftrightarrow \sim(f(x) \leq f(0)) \Leftrightarrow f(0) < f(x)$

En particular $f(\underline{x}) \leq f(0) < f(x) \quad \forall x \notin J$.

$\therefore$ Si $\underbrace{x \in J \vee x \notin J}_{x \in \mathbb{R}^N}$: $f(\underline{x}) \leq f(x)$, es decir: $f(\underline{x}) = \min\limits_{x \in \mathbb{R}^N} f(x)$

Luego, f alcanza su mínimo en $\mathbb{R}^N$.

P2 a) $f(x,t) \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $\partial_x f = \partial_t f$. $f(x,0) > 0 \Rightarrow f(x,t) > 0 \quad \forall (x,t)$.

La idea es usar el TVM y la hipótesis del problema sobre las derivadas

Recordemos que el TVM dice que $\exists\, \vec{\xi} \in [\vec{x}, \vec{y}]$ tq

$$f(\vec{x}) - f(\vec{y}) = \nabla f(\xi) \cdot (\vec{x} - \vec{y})$$, en nuestro caso sería:

$$f(x,t) - f(x_1,t_1) = \nabla f(\xi_1, \xi_2) \cdot (x - x_1, t - t_1)$$
$$= \left(\partial_x f(\xi_1,\xi_2), \partial_t f(\xi_1,\xi_2)\right)(x - x_1, t - t_1)$$
$$\Rightarrow f(x,t) = (x-x_1)\partial_x f(\xi_1,\xi_2) + (t-t_1)\partial_t f(\xi_1,\xi_2) + f(x_1,t_1)$$

Para escoger el (x_1,t_1) apropiado hay que pensar en las hipótesis

$$\partial_x f = \partial_t f$$
$$\Rightarrow f(x,t) = \partial_x f(\xi_1,\xi_2) \cdot (x - x_1 + t - t_1) + f(x_1, t_1)$$

además $f(x,t) > 0 \ \forall x$, luego, es natural tomar $t_1 = 0$

$$\Rightarrow f(x,t) = \underbrace{\partial_x f(\xi_1,\xi_2) \cdot (x - x_1 + t)}_{?} + \underbrace{f(x_1,0)}_{>0}$$

$\partial_x f$ puede ser positivo o negativo

solución? elegir x_1 tal que $x - x_1 + t = 0 \Rightarrow x_1 = x + t$

En tal caso: $f(x,t) = \cancel{\partial_x f(\xi_1,\xi_2) \cdot (x+t - (x+t))}^{\,0} + \underbrace{f(x+t,0)}_{>0}$ por hipót.

$\therefore f(x,t) > 0$, como se deseaba :)

b) $u:\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tq $\Delta u = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}^N$. Pdq. u <u>no</u> puede poseer máximos locales

<u>Sol.</u> Supongamos que u posee un máximo local, llamemoslo x_0. Sabemos que en tal caso $u''(x_0)$ es semidefinida ~~positiva~~ negativa, lo que era equivalente a:

$$\forall h \in \mathbb{R}^N: \ h^T u''(x_0) h \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \ h^T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right)_{i,j} h \leq 0$$

notar que si escogemos $h = e_i$

$$\Rightarrow e_i^T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{ij} e_i = \frac{\partial^2 u(x_0)}{\partial x_i^2} \leq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \geq 0 \iff \Delta u = 1 \leq 0$$

$\therefore$ no existe máximo local para u.

P3 a) $f(x,y) = \sin^2(x+y) + x^2 y$

a.1) Pol. de orden 2 en $(1,-1)$: $P_2(h_1,h_2) = \underset{0+1^2\cdot(-1)=-1}{f(1,-1)} + \nabla f(1,-1)\cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + (h_1,h_2) f''(1,-1) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}$

Calculemos $Df(1,-1) = \begin{pmatrix} \partial_x f(1,-1) \\ \partial_y f(1,-1) \end{pmatrix}$, $\partial_x f(x,y) = 2\operatorname{sen}(x+y)\cos(x+y) + 2xy = \operatorname{sen}(2(x+y)) + 2xy$

$\partial_y f(x,y) = \operatorname{sen}(2(x+y)) + x^2$

$$\Rightarrow Df(1,-1) = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora las deriv. de 2do orden:

$$\left.\begin{aligned} \partial_{xx} f(x,y) &= \cos(2(x+y))\cdot 2 + 2y \\ \partial_{yy} f(x,y) &= \cos(2(x+y))\cdot 2 + 0 \\ \partial_{xy} f(x,y) &= \cos(2(x+y))\cdot 2 + 2x = \partial_{yx} f(x,y) \end{aligned}\right\} \Rightarrow f''(1,-1) = \begin{pmatrix} 1+(-1) & 2\cdot 1+2 \\ 2\cdot 1+2 & 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 1\cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (h_1,h_2)\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = (h_1,h_2)\begin{pmatrix} 4h_2 \\ 4h_1+2h_2 \end{pmatrix} = 4h_1h_2 + 4h_1h_2 + 2h_2^2$$

$$\therefore P_2(x,y) = -1 + (-2h_1+h_2) + \frac{1}{2}(8h_1h_2 + 2h_2^2) = -1 + h_2 - 2h_1 + 4h_1h_2 + 1h_2^2$$

//

a.2) Pdq $|f(1+h_1,-1+h_2) - P_2(h_1,h_2)| \le 8\|h\|^3$

Notemos que $f(1+h_1,-1,h_2) - P_2(h_1,h_2) = R_3(h_1,h_2)$, es decir, debemos probar que el resto de orden 3 del desarrollo de f en torno a $(1,-1)$ está acotado por $8\|h\|^3$.

Recordemos que: $R_3(h_1,h_2) = \frac{1}{3!}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(1+\xi h_1,-1+\xi h_2)\,h_i h_j h_k$

Calculemos las derivadas de tercer orden:

$\partial_{xxx} f = -4\,\text{sen}(2(x+y)) \quad \partial_{yyy} f = -4\,\text{sen}(2(x+y)) \quad \partial_{xxy} f = 2 - 4\,\text{sen}(2(x+y))$ $(= \partial_{xyx} f = \partial_{yxx} f)$

$\partial_{xyy} f = -4\,\text{sen}(2(x+y))$

Luego, se tiene (verificar!)

$$R_3(h_1,h_2) = \frac{1}{3!}\left(\underbrace{-4\,\text{sen}(2(\xi h_1 - h_2))}_{\le 1}\left(h_1^3+h_2^3+3(h_1^2h_2+h_1h_2^2)\right) + 3\cdot 2h_1^2h_2\right)$$

$$\Rightarrow |R_3(h_1,h_2)| \le \frac{1}{3!}\left(4(h_1^3+h_2^3)+12(h_1^2h_2+h_2^2h_1)+6h_1^2h_2\right)$$

$$= \frac{2}{3}(h_1^3+h_2^3)+2(h_1^2h_2+h_2^2h_1)+h_1^2h_2$$

$$= \frac{2}{3}(\underbrace{h_1}_{\le\|h\|}+\underbrace{h_2}_{\le\|h\|})(h_1^2+h_2^2-h_1h_2) + \underbrace{(2h_1h_2)}_{\le h_1^2+h_2^2 = \|h\|^2}h_1 + \underbrace{(2h_1h_2)}_{\le h_1^2+h_2^2}h_2 + h_1\underbrace{(h_1h_2)}_{\frac{h_1^2+h_2^2}{2}}$$

$$\le \frac{2}{3}(2\|h\|)(h_1^2+h_2^2+\underbrace{|h_1h_2|}_{\le\frac{h_1^2+h_2^2}{2}}) + \|h\|^2h_1 + \|h\|^2h_2 + \frac{h_1}{2}\|h\|^2$$

$$\le \frac{4}{3}\|h\|\cdot\frac{3}{2}\|h\|^2 + \|h\|^3 + \|h\|^3 + \frac{\|h\|^3}{2} = \left(5+\frac{1}{3}\right)\|h\|^3$$

$$\le 8\|h\|^3.$$

que era lo deseado.

b) $f(x,y,z) = x^2y^4z + 3xy^2z - 5x^2y^3 + 5x^3z + (x^8+z^8)e^{-x^2-y^2}\cos(xyz)$.

Queremos $P_6(h_1,h_2,h_3)$ en torno a $(0,0,0)$.

Recordemos que:

$P_6(h_1,h_2,h_3) = \sum_{k=0}^{6} T_k(h_1,h_2,h_3)$ con $T_0(h_1,h_2,h_3) = f(0,0,0) \overset{\text{en este caso}}{=} 0$

y $T_k(h_1,h_2,h_3) = \frac{1}{k!} \sum_{i_k=1}^{3} \cdots \sum_{i_1=1}^{3} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(0,0,0)\, h_{i_1} \cdots h_{i_k}$

notemos que, como las derivadas son operadores lineales, basta ir viendo el polinomio de orden 6 para cada término de f, recordemos además que $gr(P_6) = 6$ (y de hecho $gr\, T_k = k$, y T_k solo posee términos de grado k)

Luego, si $gr(p) \leq 6 \Rightarrow P_6[p] = p(h_1,h_2,h_3)$ (pues todas las derivadas de orden menor a $gr(p)$ evaluadas en $(0,0,0)$ dan 0!)

$\therefore P_6[x^2y^4z] = 0$ ($gr(x^2y^4z) = 7$ y derivo a lo <u>más</u> 6 veces, evaluando en $(0,0,0)$)

$P_6[3xy^2z] = 3h_1h_2^2h_3$, $P_6[-5x^2y^3] = -5h_1^2h_2^3$, $P_6[5x^3z] = 5h_1^3h_3$

$P_6[(x^8+z^8)e^{-x^2-y^2}\cos(xyz)] = ?$

notar que $e^{-(x^2+y^2)} = e^{-z}$ con $z = x^2+y^2$

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Taylor 1Var}}}{=} \sum_{k\geq 0} \frac{(-z)^k}{k!} = 1 - (x^2+y^2) + \frac{(x^2+y^2)^2}{2} - \ldots$

y $\cos(xyz) = 1 - \frac{(xyz)^2}{2} + \ldots$

$P_6(h_1,h_2,h_3)[(x^8+z^8)e^{-x^2-y^2}\cos(xyz)]$

$= (h_1^8+h_2^8)\left(1-(h_1^2+h_2^2)+\ldots\right)\left(1-\frac{(h_1h_2h_3)^2}{2}+\ldots\right)$

$= \underbrace{h_1^8 \cdot \text{Terminos} + h_2^8 \cdot \text{Terminos}}$

grado $> 6 \Rightarrow$ <u>NO</u> va en el Pol.

$\therefore P_6[(x^8+z^8)e^{-(x^2+y^2)}\cos(xyz)](h_1,h_2,h_3) = 0$

$\therefore P_6[f](h_1,h_2,h_3) = 0 + 3h_1h_2^2h_3 - 5h_1^2h_2^3 + 5h_1^3h_3 + 0$

$= 3h_1h_2^2h_3 - 5h_1^2h_2^3 + 5h_1^3h_3$

P4 a) $f(x,y) = x^4 - y^4 - 3x^2 + 3y^2 + 1$.

Veamos los ptos críticos: $\nabla f(x,y) = 0 \Rightarrow \partial_x f = 4x^3 - 6x \,,\ \partial_y f = -4y^3 + 6y$

$$\Rightarrow \nabla f = 0 \iff 4x^3 - 6x = 0 \wedge 6y - 4y^3 = 0$$

$$\iff 2x(2x^2 - 3) = 0 \wedge 2y(3 - 2y^2) = 0$$

$$\Rightarrow \left(x = 0 \vee x = \pm\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right) \wedge \left(y = 0 \vee y = \pm\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)$$

$\therefore$ Ptos. críticos: $P_1 = (0,0)$, $P_2 = \left(0, \sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)$, $P_3 = \left(0, -\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)$, $P_4 = \left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}, 0\right)$, $P_5 = \left(-\sqrt{\tfrac{3}{2}}, 0\right)$

$P_6 = \left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}, \sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)$, $P_7 = \left(-\sqrt{\tfrac{3}{2}}, -\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)$, $P_8 = \left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}, -\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)$, $P_9 = \left(-\sqrt{\tfrac{3}{2}}, \sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)$

9 Ptos críticos!

Para ver que tipo de ptos. críticos son, veamos la matriz Hessiana:

$$f''(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2-6 & 0 \\ 0 & -12y^2+6 \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} 2x^2-1 & 0 \\ 0 & 1-2y^2 \end{bmatrix}$$

notar que la mat. es diagonal $\Rightarrow$ sus eltos SON sus v.p., notar además que dado que solo posee términos x^2, y^2 entonces el signo de los p.c. no importa.

Luego: $f''(P_1) = f''(0,0) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow (0,0)$ es punto silla (v.p. de signo distinto)

$$f''\left(0,\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right) = f''\left(0,-\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right) = 6\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1-\cancel{2}\cdot\frac{3}{\cancel{2}} \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \left(0,\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right) y \left(0,-\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right) \text{ son máx. locales.}$$

$$f''\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}},0\right) = f''\left(-\sqrt{\tfrac{3}{2}},0\right) = 6\begin{bmatrix} 2\cdot\frac{3}{2}-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left(\sqrt{\tfrac{3}{2}},0\right), \left(-\sqrt{\tfrac{3}{2}},0\right) \text{ son mín. locales.}$$

$$f''\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}},\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right) = f''\left(-\sqrt{\tfrac{3}{2}},\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right) = f''\left(-\sqrt{\tfrac{3}{2}},\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right) = f''\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}},-\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right) = 6\begin{bmatrix} 2\cdot\frac{3}{2}-1 & 0 \\ 0 & 1-2\cdot\frac{3}{2} \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ estos puntos son ptos. silla.

$\therefore$ hay 2 máx. locales, 2 mín locales y 5 ptos. silla.

¿Hay máx o mín global?

Notar que, en gral., una función continua siempre posee max y min en un conjunto cerrado y acotado, luego, la existencia (o no existencia) de max/min globales depende del comportamiento de f cuando $\|x\| \to \infty$ (notar que para que esto ocurra basta que 1 SOLA DIRECCIÓN se vaya a $+\infty$), vimos en P1 que si f es coerciva y cont $\Rightarrow$ posee min global.

En este problema f no es coerciva, mas aun, notar que, si vamos por la sucesion $(n,0)$: $f(n,0) = n^4 - 3n^2 + 1 \longrightarrow +\infty$ si $n \to +\infty$

$\Rightarrow$ no existe máx. global

Pero, por la sucesión $(0,+n)$: $f(0,n) = -n^4 + 3n^2 + 1 \longrightarrow -\infty$ si $n \to \infty$, es decir, no existe mínimo global, pues en la dirección del eje y, f se va a $-\infty$ de forma asintótica.

$\therefore \nexists \max_{x\in\mathbb{R}^2} f(x), \min_{x\in\mathbb{R}^2} f(x)$.

b) $g(x) = 2x^2 - 4xy + y^4 + 2$

Ptos. críticos: $\partial_x g = 4x - 4y$, $\partial_y g = -4x + 4y^3$

$\Rightarrow \nabla g = 0 \Leftrightarrow 4(x-y) = 0 \wedge 4(y^3 - x) = 0$

$\Rightarrow x = y \wedge 4(y^3 - x) = 0 \underset{x=y}{\Rightarrow} x = x^3$

$x(1-x^2) = 0$

$\Rightarrow x = 0 \vee x = \pm 1$

$\therefore$ Ptos. críticos: $(0,0), (1,1), (-1,-1)$.

Clasifiquémoslos: ¿g''? $\partial_{xx} g = 4$, $\partial_{yy} g = 12y^2$, $\partial_{xy} g = \partial_{yx} g = -4$.

$\therefore g''(x,y) = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{bmatrix}$ ¿Valores propios? (los calcularemos de forma genérica para (x,y))

$$\det(g''(x,y) - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} 4-\lambda & -4 \\ -4 & 12y^2-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)(12y^2-\lambda) - 16 = 0$$

$$48y^2 - 12y^2\lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda(-4-12y^2) + (48y^2 - 16) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{4 + 12y^2 \pm \sqrt{(12y^2+4)^2 - 4(48y^2 - 16)}}{2}$$

$$= \frac{4(1+3y^2) \pm 4\sqrt{(3y^2+1)^2 - (12y^2 - 4)}}{2} = 2(1+3y^2) \pm 2\sqrt{(3y^2+1)^2 - (12y^2-4)}$$

para $(0,0)$: $\lambda_{1,2} = 2 \pm 2\sqrt{1+4}$ $\quad \left.\begin{array}{l}\lambda_1 = 2 + 2\sqrt{5} > 0 \\ \lambda_2 = 2 - 2\sqrt{5} < 0\end{array}\right\} \Rightarrow (0,0)$ pto silla.

$(1,1)$ y $(-1,-1)$ (pues solo sale y^2): $\lambda_{1,2} = 8 \pm 2\sqrt{4^2 - 8} = 8 \pm 2\sqrt{8} = 8 \pm 4\sqrt{2}$ $\begin{array}{l} \nearrow 8 + 4\sqrt{2} > 0 \\ \searrow 8 - 4\sqrt{2} > 0 \end{array}$ $\Rightarrow (1,1)$ y $(-1,-1)$ son mín locales.

notar que por la simetría de los términos de g

$g(1,1) = g(-1,-1)$ ambos mín locales.

¿Son globales? Sí, basta ver que g es coerciva, o sea, que si $\|(x,y)\| \to \infty$ $\Rightarrow g(x,y) \to \infty$

En efecto:

$$
\begin{aligned}
g(x,y) &= 2x^2 - 4xy + y^4 + 2. \\
&= 2(x^2 - 2xy) + y^4 + 2 \\
&= 2(x^2 - 2xy + y^2) + y^4 - 2y^2 + 2 \\
&= 2(x-y)^2 + y^2(y^2-2) + \underbrace{2}_{cte}
\end{aligned}
$$

si $\|(x,y)\| \to +\infty$ $g(x,y) \to \infty$ pues solo hay términos cuadráticos de expresiones que van a $+\infty$ o $-\infty$ $\Rightarrow$ el cuadrado SIEMPRE va a $+\infty$

$\therefore$ g es coerciva y por $\underline{P1)}$ $\exists$ min global

notar que este min debe cumplir cond de 1ª y 2do orden

$$\Rightarrow \min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} g(x,y) = g(1,1) = g(-1,-1).$$

$\square$