Auxiliar 8 - Cálculo en Varias Variables
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Miércoles 03 de Octubre, 2012

Profesor de Cátedra: Jaime H. Ortega
Profesores Auxiliares: Anton Svensson - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Diremos que una función $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es **coerciva** si satisface la siguiente condición de crecimiento al infinito:

$$f(x) \to \infty \text{ si } ||x|| \to \infty$$

El objetivo de este problema, es probar que si f es una función coerciva y continua, entonces alcanza un mínimo global, para esto, suponga que f es continua y coerciva y pruebe lo siguiente:

a) Considere el conjunto $\mathcal{J} = \{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) \leq f(0)\}$. Pruebe que $\mathcal{J}$ es compacto.

b) Recordando que una función continua alcanza su máximo y mínimo en un conjunto compacto, deduzca el resultado deseado.

Pregunta 2.

a) Sea $f(x,t)$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial t}$. Supongamos que $f(x,0) > 0,\ \forall x$. Pruebe que $f(x,t) > 0,\ \forall (x,t)$.

b) Suponga que la función $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ satisface la ecuación diferencial:

$$\Delta u = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

Pruebe que u no puede tener un máximo local.

Pregunta 3.

a) Considere la función $f(x,y) = \sin^2(x+y) + x^2 y$

a.1) Encuentre el Polinomio de Taylor de orden 2 en torno al punto $(1,-1)$

a.2) Pruebe que:

$$|f(1+h_1, -1+h_2) - \mathcal{P}_2(h_1,h_2)| \leq 8||h||^3$$

b) Considere ahora la función de 3 variables:

$$f(x,y,z) = x^2y^4z + 3xy^2z - 5x^2y^3 + 5x^3z + (x^8+z^8)e^{-y^2-x^2}\cos(xyz)$$

Encuentre su Polinomio de Taylor de orden 6 en torno al punto $(0,0,0)$.

Pregunta 4.

a) Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x,y) = x^4 - y^4 - 3x^2 + 3y^2 + 1$$

Determine los puntos críticos de f y su tipo. En caso de existir (explique), determine el o los puntos donde la función alcanza su mínimo global.

b) Sea ahora $g(x,y) = 2x^2 - 4xy + y^4 + 2$. Encuentre sus puntos críticos y clasifíquelos. Determine si existe un punto mínimo global de esta función, y de ser el caso, encuéntrelo.