Auxiliar 6 - Cálculo en Varias Variables
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Miércoles 12 de Septiembre, 2012

Profesor de Cátedra: Jaime H. Ortega
Profesores Auxiliares: Anton Svensson - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Sea $A \in \mathcal{M}_{N,N}(\mathbb{R})$ una matríz simétrica.

a) Definamos $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ vía $f(x) = x^t Ax$. Pruebe que $\nabla f(x) = 2Ax$.
b) Sea ahora $g(x) = x^t x$. Deduzca $\nabla g(x)$. Compare sus resultados a los conocidos en una variable.

Pregunta 2. Un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ se dice **conexo por caminos** si para todo par de puntos $x, y \in \Omega$ existe una función $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^N$ diferenciable en $[0,1]$ tal que:

$$\gamma(0) = x, \quad \gamma(1) = y, \quad \text{y } \gamma(t) \in \Omega \quad \forall t \in [0,1]$$

esto es, un *camino diferenciable* que une los puntos x e y dentro de Ω.
Demuestre que si Ω es conexo por caminos y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es diferenciable en Ω y satisface:

$$\nabla f(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega$$

entonces f es constante. De un contraejemplo a esta afirmación si Ω no es conexo por caminos.
Indicación: Fije un punto $x_0 \in \Omega$ y considere para $y \in \Omega$ un camino diferenciable $\gamma(t)$ con $\gamma(0) = x_0$ y $\gamma(1) = y$. Estudie $\phi(t) = f(\gamma(t))$.

Pregunta 3. Dada una función $u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, definimos su **Laplaciano** como la traza de la matriz Hessiana, es decir:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

Se define además la **Ecuación de Laplace** a la ecuación en derivadas parciales siguiente:

$$\Delta u = 0$$

Nuestro objetivo, es determinar una solución para la ecuación de Laplace cuando la función u presenta simetría radial, es decir:

$$u(x) = u(x_1, \ldots, x_N) = v(r), \quad r = ||x|| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_N^2}$$

Para ello se le pide:

a) Pruebe que, si u tiene simetría radial entonces:

$$\Delta u(x) = v''(r) + \frac{N-1}{r} \cdot v'(r)$$

b) Deduzca, a partir de lo anterior, que la solución a la ecuación de Laplace en este caso, se puede expresar como:

$$v(r) = \begin{cases} b \cdot \ln(r) + c & \text{si } N = 2 \\ \frac{b}{r^{N-2}} + c & \text{si } N \geq 3 \end{cases}$$

Pregunta 4. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Pruebe que f es de clase $\mathcal{C}^1$ en todo $\mathbb{R}^2$.
d) Pruebe que $\partial_x \partial_y f(0,0) \neq \partial_y \partial_x f(0,0)$, ¿qué puede decir respecto a f?.