Propuestos Control 1 - Cálculo en Varias Variables
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile

Profesor de Cátedra: Jaime H. Ortega & Natacha Astromujjof
Profesores Auxiliares: Matías Godoy Campbell - Simón Piga - Anton Svensson

Pregunta 1. Sea $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \left[1 - \cos\left(\dfrac{x^2}{y}\right)\right] \sqrt{x^2+y^2} & x \in \mathbf{R} \wedge y \neq 0 \\ \\ 0 & x \in \mathbf{R} \wedge y = 0 \end{cases}$$

a) Pruebe que f es continua en $(0,0)$. **(2 ptos.)**

b) Pruebe la existencia de derivadas direccionales para toda dirección en $(0,0)$. **(2 ptos.)**

c) Pruebe que f no es diferenciable en $(0,0)$. ¿Es esto contradictorio? Justifique su respuesta. **(2 ptos.)**

<u>Indicación</u>: En el estudio de todas las partes es conveniente separar en casos $y = 0$ e $y \neq 0$.

Pregunta 2. Sea $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ diferenciable, $f = f(x,y,z)$, definamos la función compuesta:

$$F(r,\theta,\varphi) = f(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi) \quad r \in [0,\infty), \theta \in [0,2\pi), \varphi \in [0,\pi)$$

a) Calcule, usando la regla de la cadena, las siguientes derivadas parciales:

$$\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial F}{\partial \varphi}$$

(4.5 ptos.)

b) Demuestre que:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r\sin\varphi}\cdot\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2$$

(1.5 ptos.)

Pregunta 3. Considere la superficie

$$S^+ = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1 \ \wedge z \geq 0\right\},$$

con $a,b,c > 0$, es decir, los puntos del hemisferio superior del elipsoide de semiejes a,b,c centrado en el origen.

a) Pruebe que el plano tangente a S^+ en el punto $(x_0,y_0,z_0) \in S^+$ está dado por la ecuación:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$$

(3 ptos.)

b) Pruebe que la recta que pasa por el origen, y que es perpendicular al plano de la parte anterior, está dada por:

$$\frac{a^2x}{x_0} = \frac{b^2y}{y_0} = \frac{c^2z}{z_0}$$

(3 ptos.)

<u>Indicación</u>: Recuerde que la ecuación de una recta L en $\mathbf{R}^3$ está dada por:

$$(\vec{x} - \vec{x_0}) = \lambda\vec{d}, \ \lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

con $\vec{d}$ vector director, y $\vec{x_0} \in L$.

Pauta C1 - CVV
2012/2

P1) $f(x,y) = \begin{cases} \left(1-\cos\left(\frac{x^2}{y}\right)\right)\sqrt{x^2+y^2} & x\in\mathbb{R},\ y\neq 0 \\ 0 & x\in\mathbb{R},\ y=0 \end{cases}$.

a) f cont. en $(0,0)$:

Primero notemos que, si tomamos la sucesión $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = 0$

$\Rightarrow (x_n, y_n) \to (0,0)$ y $f(x_n,y_n) = f(x_n, 0) = 0 \quad \forall n$.

$\therefore f(x_n,y_n) \to 0$. ← candidato a límite. (+0,5)

Veamos que efectivamente es el límite: Por Sandwich

$$0 \leq \left| f(x,y) - 0 \right| \underset{\uparrow}{=} \left|\left(1-\cos\left(\frac{x^2}{y}\right)\right)\sqrt{x^2+y^2}\right| \underset{\uparrow}{\leq} \left(1+\left|\cos\left(\frac{x^2}{y}\right)\right|\right)\sqrt{x^2+y^2}$$

asumimos que $(x,y)\neq(0,0)$ sino es inmediato.

$|a-b| \leq |a|+|b|$

$$\underset{\uparrow}{\leq} (1+1)\sqrt{x^2+y^2}$$

$|\cos x| \leq 1$

$$\| \quad 2\|(x,y)\| \longrightarrow 0$$

si $(x,y)\to(0,0)$

$\therefore f(x,y) \to 0$ si $(x,y)\to(0,0)$ (+1,5)

$\Leftrightarrow f(x,y) \to f(0,0) = 0$ si $(x,y)\to(0,0)$ ie. f es cont. en $(0,0)$.

b) Veamos que existen deriv. direccionales en toda dirección para el punto $(0,0)$:

Debemos para ello estudiar el sgte límite (en $\mathbb{R}$)

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(d_1,d_2)) - f(0,0)}{t}$$

con $d = (d_1, d_2)$ tal que $\|d\| = 1$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t(d_1,d_2)) - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(td_1,td_2)}{t}$$

(+0,5)

<u>2 casos:</u> Si $d_2 = 0 \Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{f(td_1,0)}{t} = 0$ (pues $f(td_1,0) = 0 \ \forall d_1$)

Si $d_2 \neq 0 \Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{f(td_1,td_2)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\left(1-\cos\left(\frac{t^2d_1^2}{td_2}\right)\right)\sqrt{t^2d_1^2+t^2d_2^2}}{t}$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\left(1-\cos\left(t\frac{d_1^2}{d_2}\right)\right)\cancel{t}\overbrace{\sqrt{d_1^2+d_2^2}}^{=1 \text{ pues } \|d\|=1}}{\cancel{t}} = \lim_{t\to 0} \underbrace{\left(1-\cos\left(t\frac{d_1^2}{d_2}\right)\right)}_{\text{continuo en } t=0}$$

$$= 1-\cos(0) = 0.$$

$\therefore$ $\forall$ dirección $d=(d_1,d_2)$ $\exists$ derivada direccional en 0 y vale 0.

(+1,5)

c) f no es dif. en 0:

Debemos probar esto por definición:

Notar que de la parte anterior, en particular se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

$\therefore$ Candidato a matriz der: $A = (0 \ \ 0)$.

Para probar que no es diferenciable debemos probar que el límite

$$\lim_{h=(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left|f((0,0)+(h_1,h_2)) - f(0,0) - A\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}\right|}{\|h\|}$$ no existe.

Esto en este caso es con: $f(0,0) = 0$, $A\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = (0 \quad 0)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0$.

$$\Rightarrow \lim_{h=(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|f(h_1,h_2) - 0 - 0|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{h\to(0,0)} \frac{|f(h_1,h_2)|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

hay 2 casos: •) Obviamente si $h_2 = 0$ y $h_1 \neq 0$

$$\Rightarrow \lim_{h=(h_1,0)\to(0,0)} \frac{|f(h_1,0)|}{\sqrt{h_1^2+0}} = 0 \quad \text{pues } f(h_1,0) = 0 \quad \forall h_1 . \quad (0{,}5)$$

La idea entonces, es buscar, con $h_2 \neq 0$ una sucesión $h_n = (h_{1n}, h_{2n})$ tal que $h_n \to 0$

pero $\frac{f(h_n)}{\|h_n\|} \not\to 0$. Basta escoger: $h_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n\pi}\right) \to (0,0)$

pero: $$\frac{f(h_n)}{\|h_n\|} = \frac{\left(1-\cos\left(\frac{h_{1n}^2}{h_{2n}}\right)\right)\cdot \cancel{\sqrt{h_{1n}^2+h_{2n}^2}}}{\cancel{\sqrt{h_{1n}^2+h_{2n}^2}}} = \left(1-\cos\left(\frac{h_{1n}^2}{h_{2n}}\right)\right)$$

$$= \left(1-\cos\left(\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n\pi}}\right)\right)$$

$$= \left(1-\cos\left(\frac{\cancel{n}\pi}{\cancel{n}}\right)\right)$$

$$= (1-\underbrace{\cos(\pi)}_{(-1)}) \quad \forall n$$

$$= 2. \quad \forall n$$

es decir: $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{f(h_n)}{\|h_n\|} = 2 \quad \therefore \lim_{h_n=(h_{1n},h_{2n})} \frac{|f(h_n)|}{\|h_n\|} = 2 \qquad (+1)$

y $\therefore \lim_{h=(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|f(h)|}{\|h\|}$ no existe (con 2 suc. distintas dieron 2 valores distintos)

$\therefore$ f no es dif. en $(0,0)$.

Notar que esto no es contradictorio pues f dif $\Rightarrow \exists$ der direccionales pero $\exists$ der direc $\not\Rightarrow$ f dif. $(+0{,}5)$

P2) $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dif. $f = f(x,y,z)$.

$$F(r,\theta,\varphi) = f(r\cos\theta \,\mathrm{sen}\,\varphi,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ r\cos\varphi)$$

a)
$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\Big(f(r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ r\cos\varphi)\Big)$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x(r,\theta,\varphi)}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y(r,\theta,\varphi)}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z(r,\theta,\varphi)}{\partial r}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial(r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi)}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial(r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi)}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial r}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot(\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot(\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi) + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot(\cos\varphi)$$

Análogamente:
$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}\Big(f(r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ r\cos\varphi)\Big)$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}(r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial(r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi)}{\partial\theta} + \overset{0}{\cancel{\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}(r\cos\varphi)}}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot(-r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot(r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi)$$
$$= -\frac{\partial f}{\partial x}\cdot(r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot(r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial\varphi}\Big(f(r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ r\cos\varphi)\Big)$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}(r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}(r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi) + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}(r\cos\varphi)$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot(r\cos\theta\cos\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot(r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi) - \frac{\partial f}{\partial z}\cdot(r\,\mathrm{sen}\,\varphi)$$

1,5 p. por cada una.

b) Probemos que: $\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r \operatorname{sen}\varphi}\cdot\frac{\partial F}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2.$

Por simplicidad notacional usaremos la notación: $\partial_x f = \frac{\partial f}{\partial x}$ y así suces.

$$\partial_r F = \partial_x f\cdot \cos\theta \operatorname{sen}\varphi + \partial_y f\cdot \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi + \partial_z f\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \partial_r^2 F = (\partial_x f\cos\theta \operatorname{sen}\varphi + \partial_y f \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi)^2 + \partial_z f^2\cos^2\varphi + 2\partial_z f\partial_x f\cdot\cos\theta\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi + 2\partial_z f\cdot\partial_y f\cdot\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi$$

$$= \partial_x f^2\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi + \partial_y f^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi + 2\partial_x f\partial_y f\cdot\cos\theta\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\varphi + \partial_z f^2\cos^2\varphi +$$
$$2\partial_z f\cdot\partial_x f\cos\theta\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi + 2\partial_z f\cdot\partial_y f\cdot\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi.$$

$$\left(\partial_\theta F\cdot\frac{1}{r\operatorname{sen}\varphi}\right)^2 = \partial_x f^2\cdot\operatorname{sen}^2\theta + \partial_y f^2\cos\theta - 2\partial_x f\cdot\partial_y f\cdot\operatorname{sen}\theta\cos\theta.$$

$$\left(\partial_\varphi F\cdot\frac{1}{r}\right)^2 = (\partial_x f\cos\theta\cos\varphi + \partial_y f\cdot\operatorname{sen}\theta\cos\varphi)^2 + \partial_z f^2\operatorname{sen}^2\varphi - 2\partial_z f\cdot\partial_x f\cdot\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi - 2\partial_z f\partial_y f\cdot\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi$$

$$= \partial_x f^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + \partial_y f^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\varphi + 2\partial_x f\partial_y f\cdot\cos\theta\operatorname{sen}\theta\cos^2\varphi + \partial_z f^2\operatorname{sen}^2\varphi$$
$$- 2\partial_z f\cdot\partial_x f\cdot\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi - 2\partial_z f\cdot\partial_y f\cdot\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi$$

(0,8 hasta acá)

$$\Rightarrow (\partial_r F)^2+\left(\frac{1}{r\operatorname{sen}\varphi}\partial_\theta F\right)^2+\left(\frac{1}{r}\partial_\varphi F\right)^2 = (\partial_x f)^2\left(\overbrace{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\theta\cos^2\varphi}^{\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta(\operatorname{sen}^2\varphi+\cos^2\varphi)=\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1}\right)$$

$$+ (\partial_y f)^2\left(\underbrace{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi}_{\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta(\cos^2\varphi+\operatorname{sen}^2\varphi)=\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1}\right)$$

$$+(\partial_z f)^2(\underbrace{\operatorname{sen}^2\varphi+\cos^2\varphi}_{1}) + 2\partial_x f\partial_y f\left(\underbrace{\cos^2\varphi\cos\theta\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\varphi\cos\theta\operatorname{sen}\theta - \cos\theta\operatorname{sen}\theta}_{\cos\theta\operatorname{sen}\theta(\cos^2\varphi+\operatorname{sen}^2\varphi)-\cos\theta\operatorname{sen}\theta=0}\right)$$

$$+ 2\partial_z f\left(\underbrace{\partial_x f\cos\theta\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi + \partial_y f\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi - \partial_x f\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi - \partial_y f\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi}_{=0}\right)$$

(0,7 restantes).

$$= (\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2 + (\partial_z f)^2$$

$\square$

P3) $S^+ = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1 \,,\ z\geq 0\}$ $\quad a,b,c>0$.

a) Escribamos $S^+ = Gr(f)$ con $f = f(x,y)$
$= \{(x,y,z) \,|\, z = f(x,y)\}$ con f diferenciable.

Basta despejar z: $\left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2$

$$z^2 = c^2\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Tomo sol posit} \\ \text{pues } z\geq 0}}{z =} \sqrt{c^2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2} \underset{\substack{\uparrow \\ c>0}}{=} c\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}$$

así: $z = f(x,y)$ con $f(x,y) = c\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}$ notar que f es dif. siempre que $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2 \neq 1$. (+1)

En tal caso, el plano tg. está dado por la ecuación:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nabla f(x_0,y_0) \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$ con $(x_0,y_0,z_0)\in S^+$ y $z_0 = f(x_0,y_0)$.

$$\nabla f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix} ; \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{c}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}}\cdot\left(\frac{-2x}{a^2}\right)$$

$$= \frac{-x}{a^2}\cdot\frac{c}{\left(\frac{f(x,y)}{c}\right)} = \boxed{-x\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{1}{f(x,y)} = \frac{\partial f}{\partial x}}$$

análogamente $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = -y\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{1}{f(x,y)}}$ (+0,5)

$$\therefore \quad \nabla f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_0 \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{1}{f(x_0,y_0)} \\ -y_0 \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{1}{f(x_0,y_0)} \end{pmatrix} \quad \text{pero } f(x_0,y_0) = z_0$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{x_0}{z_0}\frac{c^2}{a^2} \\ -\frac{y_0}{z_0}\frac{c^2}{b^2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{x_0}{z_0}\frac{c^2}{a^2} \\ -\frac{y_0}{z_0}\frac{c^2}{b^2} \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \qquad (+0{,}5)$$

$$\Rightarrow (x-x_0)\left(-\frac{x_0}{z_0}\frac{c^2}{a^2}\right) + (y-y_0)\left(-\frac{y_0}{z_0}\frac{c^2}{b^2}\right) + (z-z_0)(-1) = 0$$

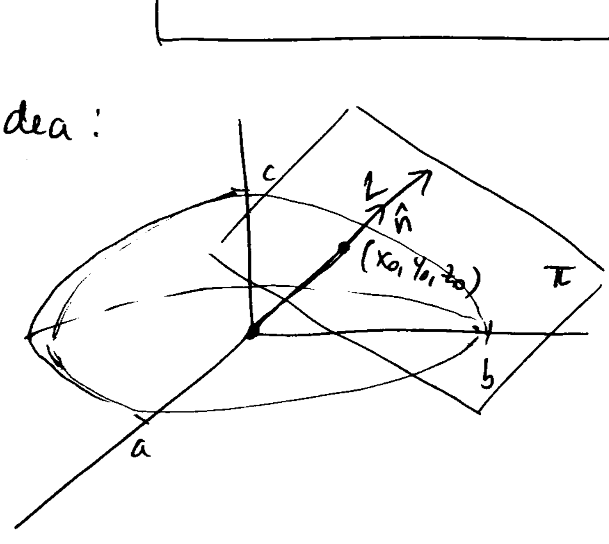
$$\frac{x_0^2}{a^2}\frac{c^2}{z_0} + \frac{y_0^2}{b^2}\frac{c^2}{z_0} + z_0 = \frac{xx_0}{a^2}\frac{c^2}{z_0} + \frac{yy_0}{b^2}\frac{c^2}{z_0} + z \qquad / \cdot \frac{z_0}{c^2}$$

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2}$$

pero $(x_0,y_0,z_0) \in S^+ \Rightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1$

$$\therefore \quad \boxed{1 = \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2}}$$ que era lo pedido. $(+1)$

b) idea:



L pasa por $(0,0,0)$ y por (x_0,y_0,z_0)

L es perpendicular al plano tg π a S^+ en (x_0,y_0,z_0)

$\Rightarrow$ vector director de L = vector normal a π $(+1)$

Es decir $\hat{n} = \hat{d} = \begin{pmatrix} -\frac{x_0}{z_0}\frac{c^2}{a^2} \\ -\frac{y_0}{z_0}\frac{c^2}{b^2} \\ -1 \end{pmatrix}$

$\therefore$ Ecc. recta $L: (\vec{x} - \vec{x_0}) = \lambda \hat{d} \quad \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \quad \vec{x_0} \in L$

Tomando $\vec{x_0} = (0,0,0)$

$$\Rightarrow \vec{x} = \lambda \vec{d} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -\frac{x_0}{z_0}\frac{c^2}{a^2} \\ -\frac{y_0}{z_0}\frac{c^2}{b^2} \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (+1)$$

$$\iff x = -\frac{x_0}{z_0}\frac{c^2}{a^2}\cdot\lambda \;,\; y = -\frac{y_0}{z_0}\frac{c^2}{b^2}\cdot\lambda \qquad \lambda \neq 0$$

$$z = -\lambda$$

$$\iff \frac{x z_0}{x_0}\frac{a^2}{c^2} = -\lambda \;\wedge\; \frac{y z_0}{y_0}\frac{b^2}{c^2} = -\lambda \;\wedge\; z = -\lambda$$

$$\lambda \neq 0$$

$$\iff \frac{x z_0}{x_0}\frac{a^2}{c^2} = z \;\wedge\; \frac{y z_0}{y_0}\frac{b^2}{c^2} = z$$

$$\iff \frac{x}{x_0}\cdot a^2 = \frac{c^2 z}{z_0} \;\wedge\; \frac{y}{y_0}b^2 = \frac{c^2 z}{z_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{a^2 x}{x_0} = \frac{b^2 y}{y_0} = \frac{c^2 z}{z_0}}$$ que era lo deseado.

(+1)

Obs. Es posible que hayan hecho (la parte a) a partir de la ecc. $\langle \vec{x} - \vec{x}_0, \hat{n} \rangle = 0$ con $\hat{n} = \nabla F(x_0, y_0, z_0)$

lo cual también es correcto. $F(x,y,z) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 - 1.$