P1 $(x_n)_n$ es de Cauchy $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists l \in \mathbb{N}$ tq $\forall n,m \geq l: \|x_n - x_m\| < \varepsilon$

a) Toda sucesión convergente es de Cauchy

En efecto, primero recordemos la def. de sucesión convergente:

$(x_n)_n \to \ell \iff \forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}$ tq $\forall n\geq N: \|x_n-\ell\|<\varepsilon$

Debemos "estimar" la cantidad $\|x_n - x_m\|$ y definir un "l" para que se tenga lo que deseamos, primero notemos que:

$$\|x_n - x_m\| \leq \|x_n-\ell\| + \|\ell - x_m\| = \|x_n-\ell\| + \|x_m-\ell\|. \quad (*)$$

$$\|x_n - x_m\| = \|x_n - x_m + \ell - \ell\| = \|(x_n-\ell)+(\ell-x_m)\|$$

ahora bien, de la def. de convergencia sabemos que $\exists N$ tq si $n\geq N: \|x_n-\ell\|<\varepsilon$ $\forall\varepsilon>0$.

En particular, $\exists \tilde{N}\in\mathbb{N}$ tq si $n\geq\tilde{N}: \|x_n-\ell\|<\varepsilon/2$: Así, si $n,m\geq\tilde{N}$

$$\Rightarrow \|x_n-x_m\| \leq \|x_n-\ell\| + \|x_m-\ell\| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Es decir, tomando $l=\tilde{N}$, se tiene que la suc. es de Cauchy.

b) $A\subset\mathbb{R}^N$ completo $\Leftrightarrow$ A cerrado.

Obs. En $\mathbb{R}^N$ TODAS las sucesiones de Cauchy son convergentes, es decir, $\mathbb{R}^N$ es completo.

($\Leftarrow$) Supongamos que A es cerrado. Debemos probar que toda suc. de Cauchy en A es convergente y su límite está en A.

En efecto, si $(x_n)_n$ es suc. de Cauchy en A, es decir $(x_n)\in A\ \forall n$, en particular es suc. de Cauchy en $\mathbb{R}^N$, como este es completo $\exists \ell\in\mathbb{R}^N$ tq $x_n\to\ell$

pero como (x_n) es suc. en A y A es cerrado $\Rightarrow \ell\in A$. $\therefore$ A es completo.

($\Rightarrow$) Directo de a), pues como toda suc. conv es de Cauchy + A completo

$\Rightarrow (x_n)_n \to \ell\in A$ por ser A completo $\forall (x_n)$ suc. conv. en A

es decir, A es cerrado.

b) Expliquemos un poco mejor esto último:

Queremos probar que A es cerrado, es decir: $\bar{A} = A$. Como $A \subset \bar{A}$ siempre basta ver que $\bar{A} \subset A$. Es decir dado $x \in \bar{A}$ Pdq $x \in A$.

Una caracterización de $x \in \bar{A}$ es: $\exists (x_n)$ suc. en A tal que $x_n \to x$.
(suponiendo $A \neq \emptyset$ por cierto)

Como, por a) Toda suc. ~~de Cauchy~~ converg. es de Cauchy, entonces $(x_n) \to x$ es de Cauchy en A que es completo $\therefore$ $x \in A \Rightarrow \bar{A} = A \iff A$ es cerrado.

c) $(x_n), (y_n)$ son de Cauchy

Pdq $\lim_n x_n = \lim_n y_n \iff \lim_n \|x_n - y_n\| = 0$

Obs. Usaremos que la función norma: $\|\cdot\| : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es continua probarlo es bastante fácil y queda propuesto Hint: Pruebe que $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$

Teniendo presente esto, probemos lo pedido:

$\Rightarrow$| Sean $(x_n), (y_n)$ suc de Cauchy tq $\lim_n x_n = \lim_n y_n = l \in \mathbb{R}^N$

Obs. Siempre $\exists l$ pues $\mathbb{R}^N$ es completo.

notar que, por linealidad del lím:

$$\underbrace{\lim_n x_n - \lim_n y_n}_{l - l = 0} = \lim_n \overbrace{(x_n - y_n)}^{z_n}$$

y como $\|\cdot\|$ es continua

$\Rightarrow$ si $\lim z_n = 0$

$\Rightarrow \lim \|z_n\| = 0 \iff \lim_n \|x_n - y_n\| = 0$

como se quería

$\Leftarrow$| Sup. que $\lim_n \|x_n - y_n\| = 0$. Pdq $\lim_n x_n = \lim_n y_n$

Notar que como $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ son de Cauchy $\Rightarrow \exists l_1, l_2$ tq $(x_n) \to l_1$
$(y_n) \to l_2$

es decir: $l_1 = \lim x_n$, $l_2 = \lim y_n$.

ahora: $\|l_1 - l_2\| = \|\lim x_n - \lim y_n\| = \|\lim (x_n - y_n)\| \overset{\text{cont. de } \|\cdot\|}{=} \lim \|x_n - y_n\| = 0$ por hipót

$\therefore \|l_1 - l_2\| = 0 \iff l_1 = l_2 \iff \lim x_n = \lim y_n$. y se concluye.

P2) $(x_n)_n$ suc. convergente : $x_n \to x$

$A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$

Pdq : A es cerrado y acotado.

A acotado: Esto es directo pues como $x_n \to x$, ie. la suc. converge a $x \in \mathbb{R}^N$ entonces no diverge! $\Rightarrow \exists R > 0$ tq $B(x,R) \supset \{x_n, n \geq N\}$

y $\exists \tilde{R} > 0$ tq $\underbrace{\{x_1, \dots, x_{N-1}\}}_{\text{cantidad finita}} \subset B(0,\tilde{R})$

basta tomar $\tilde{R} = \sup_{i \in \{1,\dots,N-1\}} \|x_i\|$.

$\Rightarrow A \subset B(0,\bar{R})$ $\quad \bar{R} = \max\{R + \|x\|, \tilde{R}\}$.

ie. A acotado.

A cerrado: Sea $l \in \bar{A} \iff \exists (z_n)$ suc. en A tal que $z_n \to l$.

Veamos que $l \in A$.

Notar que si $l \neq x$ las únicas sucesiones tal que $z_n \to l$ son:

- $z_n = l \ \forall n$, suc. cte (lo que implica $l \in A$) $\quad (*)$
- $z_n = l \ \forall n \geq N$, N dado. (lo que también implica $l \in A$).

En efecto, supongamos que no es así, primero notemos que, como $l \neq x$

$\Rightarrow \underbrace{\|l - x\|}_{\tilde{\varepsilon}} > 0$

Como $(x_n) \to x$: $\exists N$ tq $\forall n \geq N : \|x_n - x\| < \tilde{\varepsilon}/2$

$\Rightarrow$ Solo una cantidad finita de términos está a distancia mayor a $\tilde{\varepsilon}/2$ de x

Si $n \geq N$: ¿$\|x_n - l\| \geq$ algo?

$\tilde{\varepsilon} < \|l - x\| = \|l - x_n + x_n - x\| \leq \|l - x_n\| + \underbrace{\|x_n - x\|}_{< \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}} < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} + \|l - x_n\|$

$\Rightarrow \|l - x_n\| > \tilde{\varepsilon}/2 \quad \forall n \geq N$

luego, solo una cantidad finita de elementos de A está a dist. menor que $\tilde{\varepsilon}/2 > 0$. Es decir : vale $(*)$

$\therefore l \in A \Rightarrow$ A es cerrado.

P3) Para probar la existencia de límites hay MUCHAS opciones

1) Vía def $\varepsilon-\delta$: $\lim_{\vec{x}\to\vec{p}} f(\vec{x}) = \vec{l} \iff \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ tq si $\|\vec{x}-\vec{p}\|<\delta \Rightarrow \|f(\vec{x})-\vec{l}\|<\varepsilon$

2) Vía sucesiones: $\lim_{\vec{x}\to\vec{p}} f(\vec{x}) = \vec{l} \iff \forall$ sucesión $(\vec{x}_n)\to\vec{p} \Rightarrow f(\vec{x}_n)\to\vec{l}$

3) Sandwich! si $g(x)\to l$ y $h(x)\to l$ y $h(x)\le f(x)\le g(x) \Rightarrow f(x)\to l$.

Para probar que un límite NO EXISTE Basta probar que:

1) Falla la prueba $\varepsilon-\delta$: $\exists\varepsilon>0$ tq $\forall\delta>0$ si $\|\vec{x}-\vec{p}\|<\delta \Rightarrow \|f(\vec{x})-\vec{l}\|>\varepsilon$

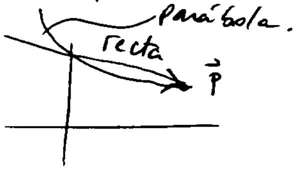
2) Existe una sucesión donde falla "2)" anterior, ie:

$\exists (x_n)\to l$ tq $f(x_n)\not\to\vec{l}$

3) Existe un "camino" tal que "camino" $\to\vec{p}$ pero $f(\text{"camino"})\not\to\vec{l}$

Entenderemos por camino a una determinada forma de ir hacia $\vec{p}$,

por ejemplo: rectas, curvas en general:



Hagamos los Pb. planteados para "tantear" las opciones (aunque yo en lo general prefiero, por su simpleza, trabajar siempre con sucesiones)

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ Sean $(x_n,y_n)\to(0,0)$

Debemos probar que $x_n^2\dfrac{\operatorname{sen}(x_n^2+y_n^2)}{x_n^2+y_n^2} \to$ "algo". (o negarlo!)

¿Candidato?: Si $x_n=\frac{1}{n}$ $y_n=\frac{1}{n}$ (es una sucesión PARTICULAR)

$$\frac{\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{2}{n^2}\right)}{\frac{2}{n^2}} = \frac{\cancel{n^2}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{n^2}}\sin\left(\frac{2}{n^2}\right) \to 0 \quad \text{pues sen es continua en } 0.$$

Candidato a límite: 0.

Veamos que efectivamente es 0: Si $(x_n,y_n)\to(0,0)$ (sucesión CUALQUIERA)

$$\frac{x_n^2\sin(x_n^2+y_n^2)}{x_n^2+y_n^2} = x_n^2\frac{\operatorname{sen}(t_n)}{t_n} \quad \text{con } t_n\to 0 \text{ pues } x_n^2+y_n^2\to 0+0.$$

Como $t_n\to 0$: $\dfrac{\sin(t_n)}{t_n}\to 1$ (lím conocido!)

$$\underbrace{x_n^2}_{\downarrow\ 0}\ \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(t_n)}{t_n}}_{\downarrow\ 1} \qquad 0\cdot 1 = 0$$

∴ el límite es 0. :)

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ ¿Candidato? Sea $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$:

$$\frac{x_n^2\, y_n}{x_n^2+y_n^2} = \frac{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{n} \to 0.$$

Veamos que efectivamente es 0:

Por Sandwich:

$$0 \le \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| = \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \le \frac{|x^2y|}{|2xy|} = \frac{|x|}{2} \quad \begin{pmatrix} x,y \\ \neq \\ x\cdot y>0 \end{pmatrix}$$

Como $x^2+y^2 \geq 2xy$

$$\Rightarrow \frac{1}{2xy} \geq \frac{1}{x^2+y^2}$$

Así, si $(x,y)\to(0,0)$

$$\Rightarrow 0 \le \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \le \frac{|x|}{2} \to 0 \quad \text{pues } x\to 0.$$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|xy|^\alpha}{x^2-xy+y^2}$ ¿Para cuales $\alpha\in\mathbb{R}$ $\exists$ el límite?

La idea es hacer algo similar a b): notar que:

$$x^2-xy+y^2 = (x^2+y^2)-xy \geq 2xy-xy = xy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{xy} \geq \frac{1}{(x^2+y^2)-xy}$$

Candidato: 0

$$\therefore\ 0 \le \frac{|xy|^\alpha}{|x^2-xy+y^2|} \le \frac{|xy|^\alpha}{|xy|} = |xy|^{\alpha-1}$$

y de esto último; ¿En que casos posee límite si $(x,y)\to 0$?

$$|xy|^{\alpha-1} = \begin{cases} \nexists \text{ el lím. si } (x,y)\to(0,0) \text{ si } \alpha<1 & \left(\text{pues queda } \frac{1}{|xy|^{|\alpha-1|}} \text{ que diverge}\right) \\ \exists \text{ el límite si } (x,y)\to(0,0) \text{ si } \alpha>1 & (\text{pues queda potencia positiva}) \end{cases}$$

¿Y el caso $\alpha = 1$?

Veámoslo: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|xy|}{x^2-xy+y^2}$: Sea

Consideremos el camino $x=y$ (osea vamos por la recta $x=y$ a $(0,0)$)

En ese caso: $\dfrac{|xy|}{x^2-xy+y^2} = \dfrac{x^2}{x^2-x^2+x^2} = \dfrac{x^2}{x^2} = 1$ indep. del valor de x!

y el camino $x=x$, $y=0$ (osea por la recta que va por el eje x!)

$$\frac{|xy|}{x^2-xy+y^2} = \frac{0}{x^2} = 0 \ \forall x!$$ luego hay 2 lím! según el camino dado

$\therefore \nexists$ el límite si $\alpha = 1$

Resumen: Si $\alpha > 1$: $\exists$ el límite y vale 0
Si $\alpha \leq 1$: $\nexists$ el límite.

d) $$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2yz}{\sqrt{x^{12}+y^6+z^4}}$$ ¿Candidato a límite: 0?

sí, pues: $x_n = \frac{1}{n} = y_n = z_n \to 0$: $\dfrac{x_n^2 y_n z_n}{\sqrt{x_n^{12}+y_n^6+z_n^4}} = \dfrac{\frac{1}{n^4}}{\sqrt{\frac{1}{n^{12}}+\frac{1}{n^6}+\frac{1}{n^4}}}$

$$= \frac{\frac{1}{n^4}}{\sqrt{\frac{1}{n^4}}\cdot\sqrt{\frac{1}{n^8}+\frac{1}{n^2}+1}} = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^2}\sqrt{\frac{1}{n^8}+\frac{1}{n^2}+1}} = \underbrace{\frac{n^2}{n^4}}_{\to 0}\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^8}+\frac{1}{n^2}+1}}}_{\to 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Probemos que el lím es 0:

Pdq: $0 \leq \left|\dfrac{x^2yz}{\sqrt{x^{12}+y^6+z^4}}\right| \leq \text{algo}(x,y,z)$ con $\text{algo}(x,y,z)\to 0$ si $(x,y,z)\to(0,0,0)$

del Hint: Sabemos que $\forall a,b,c \in \mathbb{R}^+$: $(abc)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{1}{3}(a+b+c)$

Tomemos: $a = x^{12}$ $b=y^6$ $c=z^4$

$$\Rightarrow (x^{12}y^6z^4)^{\frac{1}{3}} = x^4y^2z^{4/3} \leq \frac{1}{3}(x^{12}+y^6+z^4)$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{x^{12}+y^6+z^4}\right| \leq \left|\frac{1}{3}\frac{1}{x^4y^2z^{4/3}}\right| \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^{12}+y^6+z^4}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{|x^2yz^{4/6}|}$$

$$\therefore \quad 0 \leq \left| \frac{x^2 y z}{\sqrt{x^{12}+y^6+z^4}} \right| \leq \frac{|x^2yz|}{\sqrt{3}\,|x^2 y z^{4/6}|} = \frac{1}{\sqrt{3}} |z|^{1-4/6} = \frac{|z|^{1/3}}{\sqrt{3}} \to 0$$

Si $(x,y,z)\to(0,0,0)$

$\therefore$ el límite existe y vale 0.

P4] $\phi : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ continua.

$f(\vec{x}) = \phi\left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right)$. Pdq. Si f no es cte $\Rightarrow \lim_{\vec{x}\to\vec{0}} f(\vec{x}) \nexists$.

Sol. La idea simplemente es tomar sucesiones que vayan a $\vec{0}$ pero que vía f vayan a límites distintos.

En efecto, sean $\vec{x} \neq \vec{y}$. Consid. $\vec{x}_n = \frac{1}{n}\vec{x}$, $\vec{y}_n = \frac{1}{n}\vec{y}$

Obviamente $\vec{x}_n \to \vec{0}$, $\vec{y}_n \to \vec{0}$.

Pero: $f(\vec{x}_n) = \phi\left(\frac{\vec{x}_n}{\|\vec{x}_n\|}\right) = \phi\left(\frac{\frac{1}{n}\vec{x}}{\|\frac{1}{n}\vec{x}\|}\right) = \phi\left(\frac{\frac{1}{n}\vec{x}}{\frac{1}{n}\|\vec{x}\|}\right) = \phi\left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right)$ independiente de n !!

$\therefore f(\vec{x}_n) \to \phi\left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right)$

Por otro lado, análogamente: $f(\vec{y}_n) \to \phi\left(\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}\right)$

En particular, si $\vec{x}, \vec{y}$ son $\|\vec{x}\| = 1 = \|\vec{y}\|$ pero $\vec{x} \neq \vec{y}$

$\Rightarrow$ $f(\vec{x}_n) \to \phi(\vec{x})$ $\therefore$ f no es continua.

$\neq$ pues f no es cte.

$f(\vec{y}_n) \to \phi(\vec{y})$

P5] ℓ lineal + continua en $\vec{0} \Rightarrow$ cont. en $\mathbb{R}^N$.

Notar primero que $\ell(\vec{0}) = \vec{0}$ pues: $\ell(\vec{0}) = \ell(\vec{0}+\vec{0}) = \ell(\vec{0}) + \ell(\vec{0}) = 2\ell(\vec{0})$

$\Rightarrow \ell(\vec{0}) = 2\ell(\vec{0}) \Rightarrow \ell(\vec{0}) = \vec{0}$.

Sea ahora $\vec{x}_n \to \vec{x}$, debemos ver que $\ell(\vec{x}_n) \to \ell(\vec{x})$

Como $\vec{x_n} \to \vec{x} \iff \vec{x_n} - \vec{x} \longrightarrow \vec{x} - \vec{x} = \vec{0}$.

es decir, la sucesión $\vec{z_n} = \vec{x_n} - \vec{x}$ conv. a 0:

Por continuidad en $\vec{0}$: $\ell(\vec{z_n}) \longrightarrow \ell(\vec{0}) = 0$

$$\ell(\vec{z_n}) = \ell(\vec{x_n} - \vec{x}) = \ell(\vec{x_n}) + \ell(-\vec{x}) = \ell(\vec{x_n}) - \ell(\vec{x})$$

$\therefore$ $\ell(\vec{x_n}) - \ell(\vec{x}) \longrightarrow 0 \iff \ell(\vec{x_n}) \longrightarrow \ell(\vec{x})$

$\therefore$ ℓ es continua en $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ cualquiera, i.e. es continua en $\mathbb{R}^N$.

Finalmente probemos que $\ker \ell = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^N / \ell(\vec{x}) = \vec{0} \in \mathbb{R}^m\}$ es cerrado.

Sea $(x_n)_n$ sucesión en $\ker \ell$ tq $x_n \to x \in \overline{\ker \ell}$

Pdq $x \in \ker \ell$.

En efecto: Como $x_n \in \ker \ell \ \forall n$: $\ell(x_n) = 0 \ \forall n$.

Como ℓ es continua: $\underbrace{\ell(x_n)}_{= 0 \ \forall n} \longrightarrow \ell(x)$ Como $\ell(x_n) = 0 \ \forall n$ necesariamente $\ell(x) = 0$.

$\iff x \in \ker \ell$.

$\therefore$ $x \in \overline{\ker \ell} \Rightarrow x \in \ker \ell \iff \overline{\ker \ell} = \ker \ell \iff \ker \ell$ es cerrado.