Auxiliar 2 - Cálculo en Varias Variables
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Lunes 20 de Agosto, 2012

Profesor de Cátedra: Jaime H. Ortega
Profesores Auxiliares: Anton Svensson - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Dada una sucesión (x_n) en $\mathbb{R}^N$, diremos que esta es de Cauchy si satisface la siguiente condición:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; l \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n, m \geq l : \quad ||x_n - x_m|| \leq \varepsilon$$

Diremos además, que un conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$ es completo si y solo si las sucesiones de Cauchy convergen en este conjunto.

a) Pruebe que toda sucesión convergente es de Cauchy
b) Pruebe que $A \subset \mathbb{R}^N$ es completo si y solo si es cerrado
c) Pruebe que dadas dos sucesiones de Cauchy (x_n), (y_n), se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} ||x_n - y_n|| = 0$$

Pregunta 2. Dada una sucesión (x_n) en $\mathbb{R}^N$ convergente a $x \in \mathbb{R}^N$, pruebe que el conjunto:

$$A = \{x_n : \; n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$

es cerrado y acotado.

Pregunta 3. Estudie la existencia de los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$
b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$
c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|^\alpha}{x^2-xy+y^2}$ describa para cuales $\alpha \in \mathbb{R}$ el límite existe.
d) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2yz}{\sqrt{x^{12}+y^6+z^4}}$.
Indicación: Recuerde que la media geométrica es menor a la media aritmética.

Pregunta 4. Sea $\phi : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ una función continua, relativamente a $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, definamos $f : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ como:

$$f(x) = \phi\left(\frac{\vec{x}}{||\vec{x}||}\right)$$

Pruebe que si f no es una función constante, entonces el límite:

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{0}} f(\vec{x})$$

no existe.

Pregunta 5. Sea $\ell : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$ una función lineal, es decir: $\ell(\vec{x} + \lambda\vec{y}) = \ell(\vec{x}) + \lambda\ell(\vec{y})$ y que es continua en $\vec{0} \in \mathbb{R}^N$. Pruebe que esta función es continua en todo $\mathbb{R}^N$. Deduzca que $ker(\ell) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^N \mid \ell(\vec{x}) = 0\}$ es un conjunto cerrado.