MA1102 Álgebra Lineal - Semestre Primavera 2012
Prof. Cátedra: Mauricio Telias **Prof. Auxiliar:** César Vigouroux

Pauta Auxiliar # 2 (lo que prometí)

Jueves 9 de Agosto

P1. Una matriz $U \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ se dice unitaria si $U^T U = I_n$.

(iv) Sea U triangular superior y unitaria. Pruebe que U es diagonal y determine los valores en $\mathbb{R}$ que pueden tomar los coeficientes de la diagonal de U.

SOL:
Como U es unitaria, es invertible. Dado que es U es triangular superior, su inversa es triangular superior. Como $U^{-1} = U^T$, y esta última es triangular inferior, tenemos que U^{-1} es triangular inferior y superior a la vez, por lo tanto es diagonal, y luego concluímos que U es diagonal.
Dado que U es diagonal, $U^T = U$ y por lo tanto $U^T U = U^2$. Luego, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$
$U_{ii}^2 = 1 \iff U_{ii} = 1 \vee U_{ii} = -1$.

P2.

b) Considere las matrices cuadradas $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Demuestre que:

(i) A es invertible $\Leftrightarrow AA^t$ es invertible.

(ii) Si $A = A^2$ y $B = I - A$, entonces $B^3 = B$.

SOL (i):
A es invertible $\Rightarrow A^T$ es invertible $\Rightarrow AA^T$ es invertible.
AA^T es invertible $\Rightarrow \exists B$ tal que $(AA^T)B = I \Rightarrow A(A^T B) = I \Rightarrow A$ es invertible con inversa $A^{-1} = A^T B$.

SOL (ii):
$B^2 = (I - A)^2 = (I - A)(I - A) = (I^2 - IA - AI + A^2) = (I - 2A + A) = I - A \;\Rightarrow B^3 = BB^2 = BB = B^2 = B$

P3. a) Sea $K \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $K^T = -K$ y $I - K$ es invertible. Si $B = (I + K)(I - K)^{-1}$, demuestre que

$$B^T B = BB^T = I_n$$

SOL:

$$
\begin{array}{rcl}
B^TB & = & ((I+K)(I-K)^{-1})^T(I+K)(I-K)^T \\
 & = & ((I-K)^{-1})^T(I+K)^T(I+K)(I-K)^{-1} \\
 & = & ((I-K)^T)^{-1}(I+K)^T(I+K)(I-K)^{-1} \\
 & = & (I+K)^{-1}(I-K)((I-K)^{-1}+K(I-K)^{-1}) \\
 & = & (I+K)^{-1}((I-K)(I-K)^{-1}+(I-K)K(I-K)^{-1}) \\
 & = & (I+K)^{-1}(I+(I-K)K(I-K)^{-1}) \\
 & = & (I+K)^{-1}(I+(K-K^2)(I-K)^{-1}) \\
 & = & (I+K)^{-1}(I+K(I-K)(I-K)^{-1}) \\
 & = & (I+K)^{-1}(I+K) \\
 & = & I
\end{array}
$$

Basta hacerlo en un sentido, ya que la conmutatividad de B y B^T se deduce de que una es la inversa de la otra.

b) (i) Sean $B \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$. Pruebe que $< Bx, y >=< x, B^Ty >$.

(ii) Sea $A = I_n + B^TB$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que $< Ax, x >= ||x||^2 + ||Bx||^2$.

(iii) Concluya que A es invertible.

SOL (i):
$< Bx, y >= (Bx)^Ty = (x^TB^T)y = x^T(B^Ty) =< x, B^Ty >$

SOL (ii):

$$
\begin{array}{rcl}
< Ax, x > & = & < (I+B^TB)x, x > \\
 & = & < x+B^TBx, x > \\
 & = & < x, x > + < B^T(Bx), x > \\
 & = & ||x||^2 + < Bx, (B^T)^Tx > \\
 & = & ||x||^2 + < Bx, Bx > \\
 & = & ||x||^2 + ||Bx||^2
\end{array}
$$

SOL (iii):
Supongamos que $Ax = 0$. Luego, $0 =< Ax, x >= ||x||^2 + ||Bx||^2 \;\Rightarrow ||x||^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Asi, el sistema Ax tiene solución única $x = 0$ y por lo tanto A es invertible.