MA1102 Álgebra Lineal - Semestre Primavera 2012
Prof. Cátedra: Mauricio Telias **Prof. Auxiliar:** César Vigouroux

Auxiliar # 2

Jueves 9 de Agosto

$\boxed{\text{P1.}}$ Una matriz $U \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ se dice unitaria si $U^T U = I_n$.

(i) Sean $U, U_1, U_2 \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ unitarias. Pruebe que U es invertible y que U_1U_2 es unitaria.

(ii) Sea $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $u^T u = 1$. Pruebe que $H = I_n - 2uu^T$ es unitaria.

(iii) Sea $\theta \in \mathbb{R}$ y $G(\theta) = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$. Pruebe que $G(\theta)$ es unitaria y que cualquiera sea $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ existe un $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $(G(\theta)A)_{21} = 0$.

(iv) Sea U triangular superior y unitaria. Pruebe que U es diagonal y determine los valores en $\mathbb{R}$ que pueden tomar los coeficientes de la diagonal de U.

$\boxed{\text{P2.}}$ a) Considere los vectores $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Se define la matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ por $A = uv^t$.

(i) Pruebe que $\forall x \in \mathbb{R}^n Ax = 0 \Leftrightarrow v^t x = 0$.

(ii) Encuentre el número de variables libres en la resolución del sistema $Ax = 0$ y estudie si A es o no invertible.

b) Considere las matrices cuadradas $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Demuestre que:

(i) A es invertible $\Leftrightarrow AA^t$ es invertible.

(ii) Si $A = A^2$ y $B = I - A$, entonces $B^3 = B$.

$\boxed{\text{P3.}}$ a) Sea $K \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $K^t = -K$ y $I - K$ es invertible. Si $B = (I + K)(I - K)^{-1}$, demuestre que

$$B^t B = BB^t = I_n$$

b) (i) Sean $B \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$. Pruebe que $< Bx, y >=< x, B^T y >$.

(ii) Sea $A = I_n + B^T B$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que $< Ax, x >= ||x||^2 + ||Bx||^2$.

(iii) Concluya que A es invertible.

$\boxed{\text{P4.}}$ Encuentre el conjunto de los valores de $x_1, \dots, x_6$ que resuelve:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -3 & 5 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}$$