MA1102 Álgebra Lineal - Semestre Primavera 2012
Profesor: Alejandro Maass **Auxiliares:** César Vigouroux, Roberto Villaflor

Auxiliar # 13

Lunes 19 de Noviembre

P1. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, simétrica, definida positiva y $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la función $F(x) = x^tAx + 2b^tx + \alpha$, donde $b \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Probar que $Ax_0 + b = 0 \Rightarrow F(x) - F(x_0) = (x - x_0)^tA(x - x_0)$ y deducir que en x_0 F alcanza su mínimo.

ii) Determinar el mínimo de

$$F(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 9x_3^2 + 2x_1x_2 - 6x_2x_3 - 6x_3x_1 - 8x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 3.$$

P2. (a) Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ invertible

i) Demuestre que A^tA es definida positiva y que existe $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ invertible tal que $P^2 = A^tA$.

ii) Demuestre que existe U ortogonal que $A = UP$.

(b) i) Demuestre que si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ posee un término negativo o nulo en su diagonal, entonces no es definida positiva.

ii) Suponga que A es nilpotente de orden 2 (i.e. $A^2 = A$). Pruebe que sus valores propios son ceros y/o unos.

iii) Suponga que A es nilpotente de orden 2. Pruebe que $Im(A) \perp Ker(A)$ ssi A es simétrica.

P3. (a) Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Probar que A es semidefinida positiva.

(ii) Mostrar que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2\sqrt{2} + x_2x_3\sqrt{2} - x_3 + 1 = 0$ es la ecuación de un paraboloide elíptico. Determinar además la dirección del eje de simetría.

(iii) Expresar la forma cuadrática x^tAx como suma de cuadrados de polinomios de primer grado, y determine el conjunto donde x^tAx alcanza el mínimo.

(b) Considere la cónica de ecuación $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 4x + 4y = 4$. Efectúe un cambio de coordenadas de modo que la ecuación resultante no contenga términos lineales ni productos cruzados. Escriba la ecuación resultante. Identifique la cónica.