MA1102 Álgebra Lineal, Semestre Primavera 2012 Profesor: Alejandro Maass **Auxiliares:** César Vigouroux - Roberto Villaflor

Auxiliar #6

Martes 11 de Septiembre

$\boxed{\text{P1.}}$ Sean $\mathbb{K}_1$ y $\mathbb{K}_2$ dos cuerpos, con $\mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2$, $\mathbb{K}_1$ subcuerpo de $\mathbb{K}_2$.

a) Pruebe que $\mathbb{K}_2$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}_1$.

b) Pruebe que C sobre $\mathbb{R}$ es generado por dos elementos.

c) Pruebe que $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$ no es generado por ningún conjunto finito.

$\boxed{\text{P2.}}$ Sea $n \in \mathbb{N}$. Para un intervalo $[a, b) \subset [0, n)$ con $a, b \in \mathbb{N}$, definimos la función $1_{[a,b)} : [0, n) \longrightarrow \mathbb{R}$ por:

$$1_{[a,b)}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [a, b) \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$$

Sea $F([0, n))$ el espacio vectorial de las funciones de $[0, n)$ en $\mathbb{R}$ (con la suma de funciones punto a punto y la ponderación por escalar de $\mathbb{R}$). Definimos $E \subset F([0, n))$ como el conjunto de las funciones constantes en cada intervalo $[i - 1, i)$, con $i \in \{1, ..., n\}$, es decir

$$E = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i 1_{[i-1,i)} : \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., n\}$$

a) Pruebe que $\forall a, b \in \mathbb{N}$ tal que $[a, b) \subset [0, n)$, $1_{[a,b)} \in E$.

b) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f \in E$. Pruebe que $\alpha f \in E$.

c) Pruebe que E es s.e.v de $F([0, n))$.

d) Pruebe que el conjunto de funciones $B = \{1_{[0,1)}, 1[1, 2), ..., 1_{[n-1,n)}\}$ es linealmente independiente.

$\boxed{\text{P3.}}$ Sean E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, y V_1, V_2 s.e.v de E.

a) Demuestre que $V_1 \cap V_2$ es s.e.v de E.

b) Muestre con un ejemplo que $V_1 \cup V_2$ no es necesariamente s.e.v. de E.

c) Pruebe que $V_1 \cup V_2$ es s.e.v de E ssi $V_1 \subset V_2 \vee V_2 \subset V_1$.