MA1102 Álgebra Lineal, Semestre Primavera 2012 Profesor: Alejandro Maass **Auxiliares:** César Vigouroux - Roberto Villaflor

Auxiliar #5

Lunes 10 de Septiembre

P1. **(Proyección Estereográfica)**

Considere el plano Π que pasa por $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ con directores $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule la proyección P_0 de $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sobre Π.

b) Considere S la esfera que pasa por $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ con centro P_0. Dado $T \in S$ distinto de $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, determine la recta L que pasa por T y $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, y pruebe que $L \cap \Pi \neq \phi$.

c) Para $T = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ determine $Q \in L \cap \Pi$, calcule $R = P_0 + \dfrac{r^2}{||P_0 - Q||^2}(P_0 - Q)$, donde r es el radio de S y encuentre la pryección de R sobre L.

P2. **(Conjunto Ortonormal y Matriz Unitaria)**

Sean $u_1, ..., u_n \in \mathbb{R}^n$ tal que $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ si $i \neq j$, y $||u_i|| = 1\ \forall i = 1, ..., n$. Un conjunto $\{u_1, ..., u_n\}$ con tales características se llama conjunto ortonormal.

a) Considere $U = \begin{pmatrix} u_1^t \\ \vdots \\ u_n^t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$; pruebe que U es invertible y concluya que $Ux = 0$ ssi $x = 0$.

b) Sea $x \in \mathbb{R}^n$; pruebe que

$$x = \langle x, u_1 \rangle u_1 + ... + \langle x, u_n \rangle u_n.$$

c) Sea $\{u, v, w\} \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto ortonormal. Pruebe que $w = u \times v \quad w = v \times u$.

$\boxed{\text{P3.}}$ **(Representación de un plano como hiperplano afín)**

Sean $d_1, d_2 \in \mathbb{R}^3$ tales que $d_1 \times d_2 \neq 0$.

a) Pruebe que $\Pi_{p,d_1,d_2} \subset \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x - p, d_1 \times d_2 \rangle = 0\} = H$.

b) Construya $f_1, f_2 \in \mathbb{R}^3$ t.q. $\langle f_1, f_2 \rangle = 0$, $||f_1|| = ||f_2|| = 1$, $\Pi_{p,d_1,d_2} = \Pi_{p,f_1,f_2}$.

c) Pruebe que $H = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x - p, f_1 \times f_2 \rangle = 0\} \subset \Pi_{p,f_1,f_2}$, y concluya que $H = \Pi_{p,d_1,d_2}$.

d) Sean Π_1 y Π_2 dos planos cualquiera en $\mathbb{R}^3$ t.q. $\Pi_1 \subset \Pi_2$. Pruebe que $\Pi_1 = \Pi_2$.