MA1102 Álgebra Lineal, Semestre Primavera 2012
Prof. Cátedra: Alejandro Maass **Prof. Auxiliar:** César Vigouroux

Auxiliar # 4

Viernes 31 de agosto

$\boxed{\text{P1.}}$ Sean L_1 y L_2 rectas en $\mathbb{R}^3$, sea Π un plano. Encuentre la recta L_3 que pasa por Π y que intersecata a L_1 y a L_2, donde se tiene:

$$L_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Pi : x + y - z = 3$$

$\boxed{\text{P2.}}$ Sea Π_1 el plano de ecuación $x + y + 2z = 1$, Π_2 el plano de ecuación $-x + y = 2$ y L_1 la recta que pasa por el punto $P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y cuya dirección es $D_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(i) Encuentre la ecuación de la recta L_2, que se obtiene como la intersección de los planos Π_1 y Π_2. Entregue un vector director de dicha recta.

(ii) Encuentre el punto P_2 de la intersección de la recta L_1 y Π_1.

(iii) Calcular el punto P_3 de intersección de L_2 con el plano perpendicular a L_2 que pasa por el punto P_2.

(iv) Encuentre la ecuación paramétrica o vectorial de la recta contenida en Π_2 que pasa por el punto P_3 y es perpendicular a L_2.

$\boxed{\text{P3.}}$ Sean $a, b \in \mathbb{R}^n$. Se dice que a es ortogonal a b si $< a, b >= 0$, donde $< \cdot, \cdot >$ es el *producto punto*, y es tal que $< a, b >= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$. Considere la norma euclideana $|| \cdot || : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ tal que $||x|| = \sqrt{< x, x >}$ y de por conocida la *desigualdad triangular*: $||a + b|| \leq ||a|| + ||b||$.

(a) Pruebe que si a es ortogonal a b, entonces $\|a + xb\| \geq \|a\| \forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Pruebe que si $\|a + xb\| \geq \|a\| \forall x \in \mathbb{R}$, entonces a es ortogonal a b.

$\boxed{\text{P4.}}$ (a) Sean P y Q dos puntos en $\mathbb{R}^3$. Demuestre que el conjunto $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x - P\| = \|x - Q\|\}$ es un plano. Encuentre un punto que pertenezca a Π y un vector que sea normal a Π.

(b) Sean los vectores $a = (1, 1, \cdots, 1)$ y $b = (1, 2, 3, \cdots, n) \in \mathbb{R}^n$ con ángulo θ_n entre ellos. Calcule el límite cuando $n \to \infty$ de θ_n.