Auxiliar 2: Álgebra Lineal

$\boxed{SP_1}$ Sean

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -3 & 5 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Luego, el sistema a resolver es $Ax=b$, con $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$. Escalonemos la matriz extendida:

- Intercambiamos las filas 1, 4 para dejar en la posición (1,1) un término distinto de cero:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 2 & 8 \\ -1 & -1 & -2 & 3 & -1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & -3 & 5 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 1 & -7 \end{array}\right) \qquad \underbrace{I_{1,4}}_{F_1} \cdot A \cdot x = I_{1,4} \cdot b$$

- Sumamos la primera fila a la segunda y la tercera para anular (2,1) y (3,1):

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 1 & -7 \end{array}\right) \qquad \underbrace{E_{1,3}(1) \cdot E_{1,2}(1) \cdot F_1}_{F_2} \cdot A \cdot x = E_{1,3}(1) \cdot E_{1,2}(1) \cdot F_1 \cdot b$$

- Sumamos la segunda fila a la cuarta para anular (4,2):

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right) \qquad \underbrace{E_{2,4}(1) \cdot F_2}_{F_3} \cdot A \cdot x = E_{2,4}(1) \cdot F_2 \cdot b$$

- Restamos la tercera fila a la cuarta para anular (4,3):

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \underbrace{E_{3,4}(-1) \cdot F_3}_{F_4} \cdot A \cdot x = E_{3,4}(-1) \cdot F_3 \cdot b$$

Así el sistema queda ¡¡escalonado!!

Luego el siste $Ax=b$ que queremos resolver, se transforma en el sistema $F_4 \cdot A \cdot x = F_4 \cdot b$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es decir,

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 + 2x_6 &= 8 \\ -x_2 + 2x_4 + x_5 + x_6 &= 12 \\ -x_3 + 4x_4 - x_5 + 2x_6 &= 5 \end{aligned}$$

obtenemos un sistema de 3 ecuaciones con 6 incógnitas, lo podemos despejar dejando tres variables libres cualquiera, elijamos dejar como variables libres • independientes a x_4, x_5 y x_6; luego x_1, x_2 y x_3 se obtienen como:

$$\begin{aligned} x_3 &= 4x_4 - x_5 + 2x_6 - 5 \\ x_2 &= 2x_4 + x_5 + x_6 - 12 \\ x_1 &= -2(4x_4 - x_5 + 2x_6 - 5) + x_4 - 2x_5 + 2x_6 + 8 \\ &= -7x_4 - 2x_6 + 18 \end{aligned}$$

<u>Ojo</u>: A pesar de que para resolver el sistema escalonado podemos dejar como variables dependientes, cualquiera 3 de las 6 variables, es mejor dejar como variables dependientes a las 3 variables que son los "peldaños" del escalonamiento y despejarlas desde la última fila a la primera.

Así, podemos escribir de forma reducida el conjunto solución del sistema como:

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathbb{R}^6 \mid x_1 = -7x_4 - 2x_6 + 18 \wedge x_2 = 2x_4 + x_5 + x_6 - 12 \wedge x_3 = 4x_4 - x_5 + 2x_6 - 5\}$$

$\boxed{Sp_2}$ (i)

$$N = \begin{pmatrix} 0 & b_{1,2} & \cdots & \cdots & b_{1,n} \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

, es decir, N es triangular superior con 0's en la diagonal.

Ahora debemos probar que una matriz triangular superior con 0's en la diagonal es de orden finito, o.e. $\exists\, m \in \mathbb{N}$ t.q. $N^m = 0$; y luego hay que mostrar que $N^{n+1} = 0$. Para entender porqué ocurre esto veamos que ocurre con un ejemplo para $n=4$:

$$N_4 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \downarrow 1^\circ & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow N_4^2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & \downarrow 2^\circ & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\Rightarrow N_4^3 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & \downarrow 3^\circ & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow N_4^4 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & & \downarrow 4^\circ \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = 0 = N_4^5.$$

Observamos que lo peculiar es que cada vez que aumentamos el exponente de la potencia, una diagonal se anula. Así conjeturamos que en el caso general:

$\forall k \in \mathbb{N}$: N^k posee 0's desde la k-ésima diagonal hacia abajo.

Donde el hecho de "estar desde la k-ésima diagonal hacia abajo" se plantea matemáticamente como estar en la posición (i,j) con $i \geq j-(k-1)$ (si $k=1$, $i \geq j$ significa estar de la diagonal hacia abajo, si $k>1$ $i \geq j-(k-1)$ significa que si me muevo $k-1$ puestos a la izquierda quedo de la diagonal hacia abajo, es decir, que estoy de la k-ésima diagonal hacia abajo).

Así lo que nos gustaría probar es:

"$\forall k \in \mathbb{N}: (N^k)_{i,j} = 0 \quad \forall (i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\}: i-j \geq -k+1$".

Demostremoslo por inducción:

Caso base: $k=1$, $N^k = N$, luego N es triangular superior con ceros en la diagonal, es decir,

$(N)_{i,j} = 0 \ \forall (i,j): i \geq j$. ✓✓

Hipótesis de inducción: Supongamos que para un $k \geq 1$, $(N^k)_{i,j} = 0 \ \forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2 : i-j \geq -k+1$.

Paso Inductivo: Probemos que la proposición es verdadera para $k+1$:

Sean $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2 : i-j \geq -(k+1)+1 = -k$

$$\Rightarrow (N^{k+1})_{i,j} = (N^k \cdot N)_{i,j} = \sum_{h=1}^{n} (N^k)_{i,h} (N)_{h,j} \ ,$$

Por hipótesis de inducción, sabemos que si $i-h \geq -k+1 \Rightarrow (N^k)_{i,h} = 0$, es decir, $\forall h \in \{1,\dots,n\}$:
$i+k-1 \geq h$, $(N^k)_{i,h} = 0$; luego:

$$(N^{k+1})_{i,j} = \sum_{h=1}^{i+k-1} \underbrace{(N^k)_{i,h}}_{0} \cdot (N)_{h,j} + \sum_{h=i+k}^{n} (N^k)_{i,h} \cdot (N)_{h,j}$$

$$= 0 + \sum_{h=i+k}^{n} (N^k)_{i,h} \cdot (N)_{h,j}$$

pero además sabemos que si $h \geq j \Rightarrow (N)_{h,j} = 0$; luego como $i-j \geq -k \Rightarrow i+k \geq j$, así para
$h \geq i+k \Rightarrow h \geq j \Rightarrow (N)_{h,j} = 0$, por lo tanto:

$$(N^{k+1})_{i,j} = \sum_{h=i+k}^{n} (N^k)_{i,h} \cdot \underbrace{(N)_{h,j}}_{0} = 0.$$ // <u>lo que termina la inducción.</u>

Ahora, sean $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, entonces $i \geq 1$, $-j \geq -n \Rightarrow i-j \geq 1-n > -(n+1)+1$. Entonces aplicando la proposición para $k = n+1$ obtenemos que $\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2 : (N^{n+1})_{i,j} = 0$, osea, $N^{n+1} = 0$.

Finalmente, como $B = I + N$, y

$$(I+N)(I-N+N^2-\dots+(-1)^n N^n) = I(I-N+N^2-\dots+(-1)^n N^n) + N(I-N+N^2-\dots+(-1)^n N^n)$$
$$= (I - \cancel{N} + \cancel{N^2} - \dots + \cancel{(-1)^n N^n}) + (\cancel{N} - \cancel{N^2} + \cancel{N^3} - \dots + \cancel{(-1)^{n-1} N^n} + (-1)^n N^{n+1})$$
$$= I + (-1)^n N^{n+1} = I + (-1)^n 0 = I$$

$$(I-N+N^2-\dots+(-1)^n N^n)(I+N) = (I-N+N^2-\dots+(-1)^n N^n) I + (I-N+N^2-\dots+(-1)^n N^n) N$$
$$= (I-\cancel{N}+\cancel{N^2}-\dots+\cancel{(-1)^n N^n}) + (\cancel{N}-\cancel{N^2}+\dots+\cancel{(-1)^{n-1} N^n} + (-1)^n N^{n+1})$$
$$= I + (-1)^n N^{n+1} = I + (-1)^n 0 = I$$

$\Rightarrow$ B es invertible y $B^{-1} = I - N + N^2 - \dots + (-1)^n N^n$.

(ii) $(D \cdot C)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} (D)_{i,k} \cdot (C)_{k,j} = (D)_{i,i} (C)_{i,j}$, luego si $i > j$ (estoy bajo la diagonal):

$(C)_{i,j} = 0 \Rightarrow (D \cdot C)_{i,j} = 0$, es decir, es triangular superior.

Y si $i = j$ (sobre la diagonal): $(D \cdot C)_{i,i} = (D)_{i,i} (C)_{i,i} = (C)_{i,i}^{-1} \cdot (C)_{i,i} = 1$.

(iii) Consideremos el sistema $Ax=0$, y escalonemos para obtener el sistema $E\cdot A\cdot x=0$, donde E es el producto de las matrices elementales utilizadas en el escalonamiento (como es producto de matrices elementales es invertible). Luego $E\cdot A$ es una matriz escalonada del tipo:

$$E\cdot A=\begin{pmatrix} 0\dots 0 & e_{1,i_1} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots & \dots & 0 \dots 0 & e_{2,i_2} & \dots & \dots \\ \vdots & & & & \ddots & \\ \vdots & & & \dots 0 & e_{m,i_m} & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con } e_{k,i_k}\neq 0, \quad 1\leq i_1<i_2<\dots<i_m\leq n$$

observamos que la cantidad de filas nulas de $E\cdot A$ es $n-m$, luego si $n-m>0$ entonces el elemento $x_1=\begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ no es cero y es solución del sistema $E\cdot A\cdot x=0$ que equivale a $A\cdot x=0$, lo que contradice que $Ax=0$ posee solución única $x=0$; luego $\boxed{n-m=0}$, es decir, $n=m$.

Como $n=m$ y $1\leq i_1<i_2<\dots<i_m\leq n$ son n números naturales entre 1 y n ordenados de menor a mayor, la única posibilidad para que esto ocurra es que $i_1=1, i_2=2, \dots, i_n=n$; es decir $i_k=k \Rightarrow e_{k,i_k}=e_{k,k}\neq 0$, o sea, $E\cdot A$ es triangular superior sin ceros en la diagonal.

Ahora para ver que A es invertible, notemos que $E\cdot A$ es triangular superior sin ceros en la diagonal; luego tomando D diagonal con $(D)_{i,i}=e_{i,i}^{-1}$ obtenemos por (ii) que $D\cdot E\cdot A$ es triangular superior con 1's en la diagonal (además D es invertible con inversa D^{-1} diagonal con $(D^{-1})_{i,i}=e_{i,i}$), y por (i) $D\cdot E\cdot A$ es invertible $\Rightarrow D\cdot E\cdot A=B$ con B invertible $\rightarrow A=E^{-1}\cdot D^{-1}\cdot B$ con E^{-1}, D^{-1} y B invertible $\Rightarrow A$ es invertible.

S_{P_3}

(i) Queremos escribir J como producto de matrices elementales del tipo $I_{p,q}$ que conmuten entre sí. Para esto notemos que si p_1, p_2, q_1 y q_2 son distintas entre sí, entonces

$$I_{p_1,q_1}\cdot I_{p_2,q_2}=I_{p_2,q_2}\cdot I_{p_1,q_1} \quad \text{, o sea conmutan,}$$

ya que $I_{p_1,q_1}\cdot I_{p_2,q_2}=I_{p_1,q_1}\cdot I_{p_2,q_2}\cdot Id=M$ donde M es el resultado de intercambiar las filas p_2 y q_2 de la identidad, y luego intercambiar p_1 y q_1; y como p_1, p_2, q_1 y q_2 son filas distintas, no importa si intercambio primero a p_2 y q_2, y luego a p_1 y q_1, o si lo hago al revés. Por esto:

$$M=I_{p_2,q_2}\cdot I_{p_1,q_1}\cdot Id=I_{p_2,q_2}\cdot I_{p_1,q_1}.$$

Entonces nos gustaría escribir J como producto de matrices $I_{p,q}$ con p,q distintos entre todos los términos del producto. Así, podemos escribir J como:

$$J = I_{1,n} \cdot I_{2,n-1} \cdot I_{3,n-2} \cdots I_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

$$\text{y } J \cdot J = \left(I_{1,n} \cdot I_{2,n-1} \cdot I_{3,n-2} \cdots I_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\right) \cdot \left(I_{1,n} \cdot I_{2,n-1} \cdots I_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\right),$$

como conmutan:

$$J \cdot J = \left(I_{1,n} \cdot I_{2,n-1} \cdots I_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\right) \cdot \left(I_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \cdots I_{2,n-1} \cdot I_{1,n}\right)$$

y como $I_{p,q} \cdot I_{p,q} = Id \Rightarrow J \cdot J = Id \Rightarrow J$ es invertible y $J^{-1} = J$.

(ii) $$(JUJ)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} (J)_{i,k} (U)_{k,h} (J)_{h,j} \text{, como } (J)_{i,j} = 1 \text{ ssi } i = n-j+1$$

$$= (U)_{n-i+1,\, n-j+1}$$

$$= (\overline{U})_{i,j}.$$

Ahora, si $\overline{U}U = I$ hay que probar que $U\overline{U} = I$; como:

$$\overline{U}U = I \Rightarrow (JUJ)U = I \Rightarrow J((JUJ)U)J = JIJ$$

$$\Rightarrow (JJ)U(JUJ) = J^2 \Rightarrow I \cdot U\overline{U} = I \Rightarrow U\overline{U} = I.$$

(iii) Supongamos por contradicción que existe $H \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ t.q. $\forall U \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$: $U^t = HUH$; entonces tomando para cada $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$, la matriz $A[i,j] \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ definida por:

$$(A[i,j])_{k,h} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \wedge h = j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Luego tomando $U = A[i,j]$ con $i \neq j$ obtenemos que:

$$(A[i,j])^t = HA[i,j]H \Rightarrow (HA[i,j]H)_{i,j} = ((A[i,j])^t)_{i,j}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} (H)_{i,k} (A[i,j])_{k,h} (H)_{h,j} = \underbrace{(A[i,j])_{j,i}}_{\substack{\text{como } i \neq j \\ \text{es igual a } 0}}$$

$\Rightarrow \quad (H)_{i,i}\cdot(A[i,j])_{i,j}\cdot(H)_{j,j}=0 \quad \Rightarrow (H)_{i,i}\cdot(H)_{j,j}=0 \quad$ si $i\neq j$.

Y tomando $U=A[i,i]$ obtenemos:

$$((A[i,i])^t)_{i,i} = (HA[i,i]H)_{i,i}$$

$$\Rightarrow (A[i,i])_{i,i} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{n}(H)_{i,k}\cdot(A[i,i])_{k,h}\cdot(H)_{h,i}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = (H)_{i,i}\cdot(A[i,i])_{i,i}\cdot(H)_{i,i}$$

$$\Rightarrow 1=((H)_{i,i})^2 \qquad \forall i\in\{1,\dots,n\}.$$

Sin embargo como $n>1$ luego: $(H)_{1,1}\cdot(H)_{2,2}=0 \Rightarrow (H)_{1,1}=0 \vee (H)_{2,2}=0$

$$\Rightarrow ((H)_{1,1})^2=0 \vee ((H)_{2,2})^2=0$$

$$\Rightarrow 1=((H)_{1,1})^2=0 \vee 1=((H)_{2,2})^2=0$$

$$\Rightarrow 1=0$$

$\times$

(iv) Ocupemos el resultado demostrado en el P_2: Sea $Ux=0$, entonces $U^t(Ux)=U^t0=0$ $\Rightarrow (U^tU)x=0 \Rightarrow (I)x=0 \Rightarrow x=0$; por lo tanto el sistema $Ux=0$ tiene única solución $x=0$ y por ello U es invertible.

Observación: Observe que el mismo argumento ocupado en (iv) se podría usar para probar que si $\bar{U}U=I$ entonces U es invertible, de hecho este argumento demuestra algo más general que si $BA=I \Rightarrow A$ es invertible; y por la unicidad del inverso B es el inverso de A, y por ende también B es invertible, pero todo esto para matrices cuadradas en $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

S_{P_4}

a) (i) $(\Rightarrow)$ $Ax=0 \Rightarrow (uv^t)x=0 \Rightarrow u(v^tx)=0$, pero $v^tx\in\mathbb{R}$, luego si $v^tx\neq 0$, como $u\neq 0 \Rightarrow$ existe una coordenada $u_i\neq 0 \Rightarrow u_i(v^tx)\neq 0$ $\Rightarrow (u(v^tx))_i=u_i(v^tx)\neq 0 \Rightarrow u(v^tx)\neq 0$ $\times$, por ende $v^tx=0$.

$(\Leftarrow)$ Si $v^tx=0 \Rightarrow u(v^tx)=0 \Rightarrow (uv^t)x=0 \Rightarrow Ax=0$.

(ii) Por (i) el sistema $Ax=0$ es equivalente al sistema $v^tx=0$, donde $v=\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$; así el sistema $Ax=0$ equivale a:

$$v_1x_1+v_2x_2+\dots+v_nx_n=0,$$

como $v\neq 0$ existe una coordenada $v_k\neq 0$, luego como es un sistema de n variables con 1 ecuación hay $n-1$ variables libres y una dependiente:

$$x_k = \frac{-(v_1x_1+\dots+v_{k-1}x_{k-1}+v_{k+1}x_{k+1}+\dots+v_nx_n)}{v_k},$$

así el sistema posee solución única $x=0$ ssi no hay variables independientes, lo que ocurre ssi $n-1=0 \Leftrightarrow n=1$. Es decir A es invertible ssi $n=1$.

b) (i) $AB^{-1} = (B^{-1}B)AB^{-1} = B^{-1}(BA)B^{-1} = B^{-1}(AB)B^{-1} = B^{-1}A(BB^{-1}) = B^{-1}A$.

(ii) Por la P3 (iv) basta probar que $B^tB = I$; para esto notemos que:

$$(I+K)(I-K) = I(I-K)+K(I-K) = I-K+K-K^2 = I-K^2$$

$$(I-K)(I+K) = I(I+K)-K(I+K) = I+K-K-K^2 = I-K^2$$

y como $I-K$ es invertible, por (i) $B = (I+K)(I-K)^{-1} = (I-K)^{-1}(I+K)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow B^tB &= ((I+K)(I-K)^{-1})^t(I-K)^{-1}(I+K)\\ &= ((I-K^t)^{-1}(I+K^t))(I-K)^{-1}(I+K)\\ &= (I+K)^{-1}(I-K)(I-K)^{-1}(I+K)\\ &= (I+K)^{-1}(I+K)\\ &= I. \quad //\end{aligned}$$