Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

MA1102-3 Álgebra Lineal
Profesor Jaime San Martín
Semestre de Primavera, 2012

Auxiliar 7

Auxiliar: Álvaro Bustos

$\boxed{\text{P1}}$ Sea V un espacio vectorial y $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$. Definimos el conjunto generado por estos elementos como:

$$\langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \rangle = \{\vec{x} \in V \mid (\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R})\, \vec{x} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n\}$$

Si existe un conjunto de n vectores tales que $V = \langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \rangle$, decimos que V es un espacio vectorial (de **dimensión finita**) **generado** por los vectores $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$.

P1.a) Pruebe que $\langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \rangle$ es un subespacio vectorial de V.

Solución. Sean $\vec{v}, \vec{w} \in \langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \rangle$. Existen coeficientes α_i y β_i para los cuales $\vec{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i$, $\vec{w} = \sum_{i=1}^n \beta_i \vec{v}_i$. De este modo, dado $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\vec{v} + \lambda \vec{w} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i + \lambda \vec{w} = \sum_{i=1}^n \beta_i \vec{v}_i = \vec{w} = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \lambda \beta_i) \vec{v}_i \in \langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \rangle$$

Luego $\langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \rangle$ es un s.e.v. de V.

P1.b) Demuestre que, dado $n \in \mathbb{N}$, el conjunto de polinomios con coeficientes reales de grado n o menor es un espacio vectorial de dimensión finita, pero que $\mathbb{R}[x]$ (el conjunto de todos los polinomios) no lo es.

Solución. Si $P_n(\mathbb{R})$ es el conjunto de los polinomios de grado n entonces $P_n(\mathbb{R})$ es igual a $\langle 1, x, x^2, \ldots, x^n \rangle$, de modo que es de dimensión finita.
Notemos que la suma y la ponderación por escalar de polinomios no pueden aumentar el grado de un polinomio. De este modo una combinación lineal de polinomios $\lambda_1 p_1(x) + \cdots + \lambda_n p_n(x)$ tendrá grado menor o igual al mayor grado de entre los p_i; de este modo, si mayor grado de los p_i es m, entonces x^{m+1} no se puede expresar como combinación lineal de los anteriores. Luego $\mathbb{R}[x] \neq \langle p_1, \ldots, p_k \rangle$ para cualquier colección finita $\{p_1, \ldots, p_n\}$.

P1.c) Pruebe que, si $V = \langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \rangle$ y el conjunto $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ es l.d., entonces este conjunto tiene un subconjunto l.i. que también genera V. (**Indicación**: Pruebe que si el conjunto es l.d. se puede sacar un vector sin afectar el espacio generado). Un conjunto l.i. que genera un espacio V se denomina **base** del espacio.

Solución. Supongamos que $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ es l.d., y, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que ninguno es cero. Como el conjunto es l.d., existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, no todos nulos, tales que:

$$\lambda_1 \vec{x}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{x}_n = \vec{0}$$

Sabemos que algún $\lambda_i \neq 0$; podemos asumir que es λ_1, reordenando los vectores si es necesario. Entonces se tiene que:

$$\vec{x}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{x}_2 - \cdots - -\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\vec{x}_n$$

Así, podemos ver que cualquier combinación lineal de $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$ puede expresarse en función de $\{\vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ como combinación lineal. Por lo tanto:

$$\langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \rangle = \langle \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \rangle$$

y esto nos permite eliminar un vector sin afectar el espacio generado. Mientras el conjunto generador sea l.d. podemos repetir este proceso; eventualmente llegaremos a un conjunto l.i. (ya que asumimos que ninguno de los $\vec{x}_i$ era nulo), el que será una base (conjunto generador l.i.) del espacio generado por estos vectores.

P1.d) Considere el conjunto $\mathcal{S}$ de todas las sucesiones, y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$ el conjunto de todas las progresiones aritméticas. Demuestre que $(\mathcal{A}, +)$ es un s.e.v. de dimensión finita de $(\mathcal{S}, +)$. Pruebe también que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{S}$, el conjunto de las progresiones geométricas, no puede ser un s.e.v. de $(\mathcal{S}, +)$. ¿Es posible que sea un espacio vectorial con otra operación? De ser así, ¿es un s.e.v. de $\mathcal{S}$ con esta nueva operación?

Solución. Una sucesión $(a_n)_n$ es una P.A. ssi satisface $a_{n+1} - a_n = d$ para algún d constante. Podemos ver que $\mathcal{A}$ es un s.e.v. de $\mathcal{S}$ notando que la diferencia entre un término y el anterior para una combinación lineal de P.A.s es la combinación lineal de las diferencias constantes de cada P.A., por lo que es constante.
Consideremos las P.A. $a_n \equiv 1$ (constante) y $b_n = n$. De este modo, la P.A. que satisface $c_n = c_0 + nd$ será igual a la P.A. dada por $c_0(a_n)_n + d(b_n)_n$. Luego $\mathcal{A} = \langle (a_n)_n, (b_n)_n \rangle$, y $\mathcal{A}$ es un s.e.v. de $\mathcal{S}$ de dimensión dos.
Notemos que $\mathcal{G}$ no puede ser s.e.v. de $\mathcal{S}$ ya que la suma de progresiones geométricas no es necesariamente progresión geométrica. Como contraejemplo podemos tomar $a_n = 2^n, b_n = 3^n$.
Sin embargo, podemos restringirnos al conjunto $\mathcal{S}^+$ de las sucesiones con términos estrictamente positivos, y definir $(a_n)_n \dot{+} (b_n)_n := (a_n b_n)_n, \lambda(a_n)_n := (a_n^\lambda)_n$. Esto hace que $\mathcal{S}^+$ sea un espacio vectorial. Si consideramos $\mathcal{G}^+ = \mathcal{G} \cap \mathcal{S}^+$ el conjunto de todas las P.G. estrictamente positivas, podemos comprobar directamente que $\mathcal{G}^+$ es s.e.v. de $\mathcal{S}^+$.

$\boxed{\text{P2}}$ En este ejercicio, $\mathcal{F}(X, Y)$ representará al conjunto de todas las funciones $f : X \to Y$.

P2.a) Sea un conjunto X cualquiera y consideremos el espacio $\mathcal{F}(X, \mathbb{Z}_2)$. Pruebe que $2^X = \mathcal{F}(X, \mathbb{Z}_2)$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_2$. (En general, dado cualquier conjunto X y cualquier cuerpo $\mathbb{K}$, el conjunto $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial). Dado $Y \subseteq X$, considere la función indicatriz $\mathbb{1}_Y(x) : X \to \mathbb{Z}_2$, cuyo valor es 1 si $x \in Y$, y 0 en caso contrario. Observe que todos los elementos del conjunto 2^X son indicatrices; ¿cómo interpreta la suma en este espacio?

Solución. Probaremos que, si $\mathbb{K}$ es un cuerpo, $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Pero esto es directo del hecho de que hereda la asociatividad y conmutatividad de $+$ del cuerpo $\mathbb{K}$, que la función nula $0(x) \equiv 0$ es un e. neutro y que la función $(-f)(x) := -(f(x))$ hace de elemento neutro, lo que da a este conjunto estructura de grupo abeliano. De manera análoga vemos que se tienen las propiedades de espacio vectorial.
Todo elemento de $2^X = \mathcal{F}(X, \mathbb{Z}_2)$ es una indicatriz. Esto se deduce del hecho de que a cada $f \in 2^X$ puede asociarse el conjunto $Y = \{x \in X : f(x) = 1$ de manera biunívoca. Así, se tiene que, como $1 + 1 = 0$ en $\mathbb{Z}_2$, entonces:

$$\mathbb{1}_Y(x) + \mathbb{1}_Z(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (x \in Y \wedge x \notin Z) \vee (x \notin Y \wedge x \in Z) \\ 0 & \text{si} \quad \text{no} \end{cases}$$

Es decir, en $\mathbb{Z}_2$, se tiene que $\mathbb{1}_Y(x) + \mathbb{1}_Z(x) = \mathbb{1}_{Y \Delta Z}(x)$, la diferencia simétrica.

P2.b) Considere el espacio vectorial $F = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, y los subconjuntos $F_p = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = f(-x)\}$ y $F_i = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = -f(-x)\}$. Pruebe que estos conjuntos son espacios vectoriales, que $F_p \cap F_i = \{\vec{0}\}$ y que cada elemento de F puede escribirse como la suma de un elemento de F_p y uno de F_i. Concluya que esta descomposición es única. Escribimos en este caso $F = F_p \oplus F_i$ y decimos que F es **suma directa** de los subespacios F_p y F_i.

Solución. Notemos que toda función real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ puede escribirse como suma de una función par y una impar:

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{par}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{impar}}$$

De este modo, $F = F_p + F_i$. Si $f \in F_p \cap F_i$, entonces $f(x) = f(-x) = -f(-x)$, de modo que para todo x se tiene que $f(x) = f(-x)$. Pero el único número real que satisface esto es cero; luego, $f \equiv 0$, la función nula.
Así, vemos que la descomposición $f = f_p + f_i$ tiene que ser única, ya que si $f = f_p + f_i = g_p + g_i$, entonces $f_p - g_p = g_i - f_i$, con las f_p, g_p funciones pares y las otras impares; luego, $f_p - g_p = g_i - f_i \in F_p \cap F_i = \{0\}$; luego $f_p = g_p$ y $f_i = g_i$. Esto prueba que la descomposición es única.

$\boxed{\text{P3}}$ Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, y sean $W_1, W_2 \subseteq V$ subespacios vectoriales. Definimos la **suma** de estos subespacios como el conjunto:

$$W_1 + W_2 = \{\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \mid \vec{w}_1 \in W_1 \wedge \vec{w}_2 \in W_2\}$$

En el caso de que $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$ decimos que la suma es directa y escribimos el espacio suma como $W_1 \oplus W_2$. Del mismo modo, definimos el **producto directo** de dos espacios vectoriales como su producto cartesiano $W_1 \times W_2$, con las operaciones de suma y producto dadas por:

$$(\vec{w}_1, \vec{w}_2) + (\vec{w}_1', \vec{w}_2') = (\vec{w}_1 + \vec{w}_1', \vec{w}_2 + \vec{w}_2'),\ \lambda(\vec{w}_1, \vec{w}_2) = (\lambda\vec{w}_1, \lambda\vec{w}_2)$$

P3.a) Pruebe que la suma, el producto y la intersección de subespacios vectoriales es un espacio vectorial. ¿Qué ocurre con la unión? Si no es un espacio vectorial, ¿cuál es el menor subespacio vectorial de V que la contiene?

Solución. Para la suma y el producto de subespacios vectoriales, podemos comprobar que también son espacios vectoriales de forma directa mediante descomposiciones del tipo:

$$(\vec{w}_1 + \vec{w}_2) + \lambda(\vec{w}_1' + \vec{w}_2') = (\vec{w}_1 + \lambda\vec{w}_1') + (\vec{w}_2 + \lambda\vec{w}_2') \in W_1 + W_2$$

y una descomposición análoga para $W_1 \times W_2$. Para la intersección, basta notar que si $\vec{u}, \vec{v} \in W_1 \cap W_2$, entonces $\vec{u} + \vec{v} \in W_1$ y lo mismo vale para W_2, luego están en la intersección.
En cambio, lo anterior no vale para la unión de subespacios. Basta considerar los subespacios $\mathbb{R} \times \{0\}$ y $\{0\} \times \mathbb{R}$ del espacio $\mathbb{R}^2$; los vectores $(0,1)$ y $(1,0)$ pertenecen a su unión, pero la suma de éstos no. Podemos ver que, si $W_1, W_2 \subseteq V$ son subespacios, dados $\vec{w}_1 \in W_1, \vec{w}_2 \in W_2$ y U el menor subespacio que contenga a $W_1 \cup W_2$, entonces $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in U$, es decir, $U \subseteq W_1 + W_2$. Asimismo, $W_1 + W_2 \subseteq U$, por el mismo argumento; de este modo, deben ser iguales.

P3.b) Pruebe que la función $f : W_1 \times W_2 \to W_1 + W_2$ dada por $f((\vec{w}_1, \vec{w}_2)) = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$ es una biyección si y solo si la suma $W_1 + W_2$ es directa. Observe que, si la suma no es directa, esta es una epiyección.

Solución. Supongamos que f no es una biyección. Como es epiyectiva, entonces no es inyectiva; de este modo, existen $\vec{w}_1, \vec{w}_1' \in W_1, \vec{w}_2, \vec{w}_2' \in W_2$, con $\vec{w}_1 \neq \vec{w}_1'$ o $\vec{w}_2 \neq \vec{w}_2'$, tales que $f(\vec{w}_1, \vec{w}_2) = f(\vec{w}_1', \vec{w}_2')$; de este modo $\vec{w}_1 - \vec{w}_1' = \vec{w}_2' - \vec{w}_2 \in W_1 \cap W_2$. Como alguno de estos pares no es cero, entonces $W_1 \cap W_2 \neq \{\vec{0}\}$; es decir, la suma no es directa.
Del mismo modo se tiene la recíproca: si f es una biyección, entonces $f(\vec{w}_1 + \vec{w}_2) = 0$ ssi $\vec{w}_1 = \vec{w}_2 = \vec{0}$. Si $W_1 \cap W_2 \neq \{\vec{0}\}$, entonces existe $\vec{w}_1 \neq \vec{0}$ en ambos espacios, y luego $f(\vec{w}_1, -\vec{w}_1)$ está definido y es cero. Pero esto contradice lo anterior. Así, $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$.

P3.c) Pruebe que si $\{\vec{w}_i\}_{i=1}^n \subseteq W_1$ y $\{\vec{w}_j'\}_{j=1}^m \subseteq W_2$ son conjuntos l.i., entonces el conjunto $\{(\vec{w}_i, \vec{w}_j')\}_{i,j}$ es l.i. en $W_1 \times W_2$. Concluya que W_1 y W_2 son de dimensión finita ssi $W_1 \times W_2$ es de dimensión finita ssi $W_1 + W_2$ es de dimensión finita.

Solución. Supongamos que $\sum \lambda_{ij}(\vec{w}_i, \vec{w}_j') = \vec{0}$. Esto es igual a $\sum(\lambda_{ij}\vec{w}_i, \lambda_{ij}\vec{w}_j') = (\vec{0}, \vec{0})$, lo que implica, por ser los conjuntos l.i., que $\sum_{i=1}^n \lambda_{ir} = \sum_{j=1}^m \lambda_{sj} = 0$ para r, s cualesquiera. Así, reordenando de manera adecuada, podemos concluir que $\lambda_{ij} = 0$ para cualquier i, j.
De este modo, $\dim(W_1 \times W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$, si son de dimensión finita. La imagen de una base de $W_1 \times W_2$ es un generador de $W_1 + W_2$, lo que implica que este espacio también es de dimensión finita. Pero W_1 y W_2 son s.e.v. de $W_1 + W_2$; de este modo, si el espacio suma es de dimensión finita, los espacios sumandos también han de serlo. Esto prueba la triple equivalencia.