

Auxiliar Extra 2

Auxiliar: Álvaro Bustos

P1 (Primavera 2008) Sea $V = M_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices de 2×2 con coeficientes reales, y las operaciones usuales de suma y producto de matriz por escalar. Se definen

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a + d = 0 \right\}$$
$$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -x & y \\ x & z \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

P1.a) Demuestre que W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de V .

P1.b) Encuentre bases para W_1 y W_2 indicando las respectivas dimensiones de cada subespacio.

P1.c) Encuentre una base y la dimensión de $W_1 \cap W_2$.

P1.d) Complete una base de W_1 para obtener una base de V . Justifique.

P2 Sea $[a, b]$ un intervalo contenido en el intervalo $[0, n]$ con $a, b, n \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$ la función indicatriz de $[a, b]$:

$$\mathbb{1}_{[a,b]}(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{si } x \notin [a, b] \end{cases}$$

Sea $\mathcal{F}([0, n], \mathbb{R})$ el e.v. de las funciones del intervalo $[0, n]$ en \mathbb{R} . Definimos el conjunto $F \subseteq \mathcal{F}([0, n], \mathbb{R})$ de las funciones constantes por pedazos de largos enteros, es decir:

$$f \in F \iff (\forall 1 \leq i \leq n)(\exists \lambda_i \in \mathbb{R}) : (\forall x \in [0, n]) f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbb{1}_{[i-1, i)}(x)$$

P2.a) Sea $[a, b]$ un intervalo con $a, b \in \mathbb{N}$ y $a < b < n$. Pruebe que $\mathbb{1}_{[a, b]} \in F$.

P2.b) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ una constante y $f \in F$. Pruebe que $g = \alpha f \in F$.

P2.c) Pruebe que F es un subespacio vectorial de $\mathcal{F}([0, n], \mathbb{R})$.

P2.d) Pruebe que el conjunto de funciones $B := \{\mathbb{1}_{[0,1)}, \mathbb{1}_{[1,2)}, \dots, \mathbb{1}_{[n-1,n)}\}$ es un conjunto linealmente independiente.

P2.e) Encuentre una base de F .

P2.f) Encuentre un isomorfismo (transformación lineal biyectiva) $T : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ y calcule $T(\mathbb{1}_{[a,b]})$.

P3 (Primavera 2011) Para esta pregunta, considere un plano Π en el espacio euclidiano \mathbb{R}^3 .

P3.a) Considere un punto $P \notin \Pi$, y sea $S(P)$ su punto simétrico en el plano Π (es decir, el segmento que une P con $S(P)$ es normal a Π y además $d(P, \Pi) = d(S(P), \Pi)$). Demuestre que para cualquier punto $Q \in \Pi$ se tiene que $d(P, Q) = d(S(P), Q)$.

P3.b) Considere el plano $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ y $A, B \in \mathbb{R}^3$ dos puntos ubicados al mismo lado del plano Π . Muestre que el punto $R \in \Pi$ tal que $d(A, R) + d(B, R)$ es mínima se obtiene como la intersección del plano Π con la recta que une los puntos $S(A)$ con B .

P3.c) Si $A = [1, 1, 2]$, $B = [2, 1, 0]$ y $\Pi : x + y + z = 1$, encuentre el punto R de la parte anterior y la distancia mínima $d(A, R) + d(B, R)$.

P4 Considere para esta pregunta el espacio vectorial $\mathbb{R}[x]$ de los polinomios con coeficientes reales.

P4.a) Sea $p(x)$ un polinomio de grado 1 o mayor. Demuestre que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, los polinomios $\{1, p(x), p(x)^2, \dots, p(x)^n\}$ forman un conjunto l.i.; concluya que para cualquier $a \in \mathbb{R}$ los polinomios $\{1, (x-a), (x-a)^2, \dots, (x-a)^n\}$ forman una base de $P_n(\mathbb{R})$.

P4.b) ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}[x]$ son subespacios vectoriales?

1. $M = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : p(x)^2 = (p(x))^2\}$
2. $S(\lambda) = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : p(\lambda) = 0\}$
3. $U = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : p(0) = 1\}$
4. $E(\lambda, \mu) = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : p(\lambda) = p(\mu)\}$

P4.c) Sea V un subespacio vectorial de $\mathbb{R}[x]$. Pruebe que este espacio es de dimensión finita si y solo si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(\forall p(x) \in U) \deg(p(x)) \leq n$.

P5 Para este ejercicio, considere subespacios de \mathbb{R}^n .

P5.a) Considere el conjunto:

$$B = \{(1, 1, 1, 2, 3), (1, 2, -1, -2, 1), (3, 5, -1, -2, 5), (1, 2, 1, -1, 4)\}$$

Encuentre un subconjunto l.i. C de B (una base) tal que $\langle B \rangle = \langle C \rangle$.

P5.b) Halle una base y la dimensión del espacio solución W del siguiente sistema homogéneo:

$$x + 2y - 2z + 2s - t = 0$$

$$x + 2y - z + 3s - 2t = 0$$

$$2x + 4y - 7z + s + t = 0$$