

Hints Para Aux Extra 2

P1 Hecha en clases

P2 Solo recordar que si f es impar $\Rightarrow f(0) = 0$

$$\begin{aligned} \text{Y que } \frac{d}{dx}(g(x)) &= \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} f(t) dt \\ &= f(x^2) \cdot 2x \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{TFC y} \\ \text{regla de la} \\ \text{cadena.} \end{array} \right\}$$

Como f es creciente y $f(0) = 0 \Rightarrow f(x) > 0 \quad \forall x > 0$.
 $\Rightarrow f(x^2) \geq 0$. (Pues $x^2 \geq 0$)

$$\Rightarrow f(x^2) \cdot 2x = 0 \Leftrightarrow \underbrace{f(x^2) = 0}_{\text{se anula}} \vee 2x = 0$$

si $x = 0$ (f creciente)

$\Rightarrow x = 0$ es óptimo.

Si calculan la segunda derivada de g se darán cuenta que $g'' \geq 0$ (convexa) $\Rightarrow x = 0$ es mínimo y como $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow$ el mínimo es global.

P3 Esta pregunta fue propuesta y "resuelta" en auxiliar 14

P4 (a) $\sum_{n \geq 1} \frac{(n+1)^n}{n^{n+2}}$, recordar que $\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$.

$$\Rightarrow \sum \frac{(n+1)^n}{n^{n+2}} = \sum \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n^2} \quad \text{como } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e \text{ (está controlado)}$$

comparamos el límite con $\sum \frac{1}{n^2}$ que es convergente.

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0 \Rightarrow \sum \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n^2} \text{ converge}$$

$$(b) \sum \frac{(n+1)^n}{n^{n+2} + (n+1)^n} \leq \underbrace{\sum \frac{(n+1)^n}{n^{n+2}}}_{\text{converge (1a)}}$$

$$(c) \sum \frac{1}{n \ln n (1 + \ln n)}$$

Criterio de la Integral (se deben verificar hipótesis)

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (1 + \ln n)} &\sim \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x (1 + \ln x)} dx \quad \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x} dx \end{array} \\ &= \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{u(1+u)} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{u+u^2} du \\ &\leq \underbrace{\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{u^2} du}_{\text{Converge.}} \\ \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (1 + \ln n)} &\text{converge.} \end{aligned}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)}{2^n}$$

Estudiamos convergencia absoluta (Para sacarnos el cos(.))

$$\sum \left| \frac{n^2 \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)}{2^n} \right| \leq \underbrace{\sum \frac{n^2}{2^n}}$$

Criterio de la Raíz - n-ésima

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} &= \frac{1}{2} \left(\sqrt[n]{n^2} \right)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \sum \frac{n^2}{2^n} \text{ Converge} \\ \Rightarrow \sum \left| \frac{n^2 \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)}{2^n} \right| &\text{converge} \Rightarrow \sum \frac{n^2 \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)}{2^n} \text{ converge} \end{aligned}$$

P5 Propuestos (Ejercicios (b) y (c) ya fueron)
Resueltos anteriormente.

Para el (b) Notar que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+x^4}} dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+x^4}} dx}_{\text{①}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+x^4}} dx}_{\text{②}}$$

$$\leq \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx}_{\text{Converge}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4}} dx}_{\text{Converge}}.$$

Otra forma es comparar al límite la integral ① con $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}$
y la ② con $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4}}$.

P6 Absoluta:
Recordar límites como $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (1 - \cos \frac{1}{n}) \rightarrow \frac{1}{2}$
para el estudio de $\sum (-1)^n n (1 - \cos \frac{1}{n})$
Recordar el criterio de la integral para $\sum (-1)^n \frac{1}{n \ln n (1 + \ln n)}$
Condición: Recordar Leibnitz.

P7 Resuelta en clases. Recordar la corrección en la parte
(c) la serie debiere decir $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n (2n+1)}$.

P8 (a) Resuelta en Aux 15.
(b) Usar criterios del cociente, $R = +\infty$ $I = IR = (-\infty, \infty)$.
(c) $\sum \frac{(\ln 3)^{2n+1}}{(2n+1)!}$, calcular $f'(x) = \sinh(x)$ y evaluar
en $x = \ln 3 \in I$

Para calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln 3)^{2n+1}}{(2n+1)!}$, pensar ¿qué
para si $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 3)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ converge?

P9 (a) Resulta en clases

(b) Ver P3 (b) del Contab 6 - 2006 (Malla vieja)

P10 (a) $f(x) = \ln(1+x^2) \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$
 $= 2x \cdot \frac{1}{1-(-x^2)}$
 $= 2x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$
 $f'(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}$

Ahí es fácil obtener $f(x) = \int f'(x) dx$ (No olvidar la constante de integración)
 (b) Usar comparación al límite (con $\sum a_n$).

(c) $\sum \sqrt{C_n \cdot C_{n+1}}$ si n es par $\Rightarrow n+1$ es impar
 si n es impar $\Rightarrow n+1$ es par

$\Rightarrow C_n \cdot C_{n+1} = |b_n| \cdot \frac{1}{n^4}$

$\Rightarrow \sqrt{C_n C_{n+1}} = \frac{\sqrt{|b_n|}}{n^2}$

$\Rightarrow \sum \sqrt{C_n C_{n+1}} = \sum \frac{\sqrt{|b_n|}}{n^2}$, basta comparar $\rightarrow$ al límite con $\sum \frac{1}{n^2}$
 y recordar que $b_n \rightarrow 0$ pues $\sum b_n$ converge.

(d) Esta se puede hacer de Muchas formas.
Una de ellas es la siguiente:

$\sum a_n$ converge $\Rightarrow \sum a_{n+1}$ converge (cambio de índice)
de la desigualdad de los medios

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$
$$\Rightarrow \sum \sqrt{a_n a_{n+1}} \leq \underbrace{\frac{1}{2} \sum a_n}_{\text{Converge}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum a_{n+1}}_{\text{Converge}}$$

otra forma es usar comparación al límite.

(e) Usar comparación al límite

[P11] Ver pack de Controles 3, esta pregunta es la
P3 - C3 - 2010 - 1 $\leftarrow$
(★) $\rightarrow$ les recomiendo revisar ese control completo
(está difícil) y tiene preguntas de curvas
integrales impropias y series.

Suerte !!