

P1)

$$(a) \int_0^1 \frac{\cos(x)}{x^2} dx$$

Forma 1: como $\cos(0) \neq 0$, la función "se parece" a $\frac{1}{x^2}$

$\Rightarrow$ Comparación al límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \neq 0.$$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\cos x}{x^2} dx$ y $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ se comportan de la misma forma. (Ambas divergen)

Forma 2.

como para $0 \leq x \leq 1$, $\cos(1) \leq \cos(x) \leq 1$

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{x^2} dx \geq \int_0^1 \frac{\cos(1)}{x^2} dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx}_{\text{Diverge}}$$

de lo cual, por comparación, se tiene que $\int_0^1 \frac{\cos x}{x^2} dx$ diverge.

$$(b) \int_0^{+\infty} \frac{x+1}{e^x - x} = \int_0^1 \frac{x+1}{e^x - x} + \int_1^{+\infty} \frac{x+1}{e^x - x}$$

La primera integral es propia, por lo que converge en la segunda comparamos al límite con $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x+1}{e^x - 1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2}{e^x - 1} = 0 \quad \left(\text{ver resumen en Material Docente} \right)$$

Caso $L=0$

Como $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge $\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{x+1}{e^x - 1} dx$ converge también.

$$(c) \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(x+1)} dx \quad \alpha \in \mathbb{R}, \text{ Es de 3era especie.}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha(x+1)} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(x+1)} dx$$

$\Downarrow$ $\Downarrow$
 $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}$ $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha+1}}$

Como se dijo en clase, para confirmar de que efectivamente esas integrales "se parecen" usamos comparación al límite, en el primer caso:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^\alpha(x+1)}}{\frac{1}{x^\alpha}} = 1 \neq 0$$

en el segundo:

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^\alpha(x+1)}}{\frac{1}{x^{\alpha+1}}} = 1 \neq 0$$

(1) dice que ambas integrales convergen ssi $\alpha < 1$

(2) dice que ambas integrales convergen ssi $\alpha+1 > 1$

(1) y (2) se cumplen simultáneamente ssi $0 < \alpha < 1$.

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(x+1)} dx = \begin{cases} \text{converge} : \alpha \in (0, 1) \\ \text{diverge} : \alpha \notin (0, 1) \end{cases}$$

Nota: se asumió conocido el comportamiento de

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} \quad \text{y} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha+1}} \quad \text{respectivamente.}$$

$$(e) \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+x^4}} \quad \underline{\text{OJO: 3era especie}}$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+x^4}}}_{\approx \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+x^4}}}_{\approx \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}}$$

Basta usar el criterio de comparación al límite en ambos casos, para concluir que ambas convergen. queda propuesto hacerlo.

$$(f) \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4-x^2}} dx \quad \underline{\text{OJO: 3era especie}}$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4-x^2}} = \underbrace{\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}}_{\approx \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}} + \underbrace{\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4-x^2}}}_{\approx \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}}$$

Comparen ambas integrales al límite y sabe que cada una converge.

$$(g) \int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{\sin x}{x} \quad \underline{\text{OJO: tercera especie.}}$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \frac{e^{-x} \sin x}{x}}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x} \sin x}{x}}_{I_2}$$

Para $I_1 = \int_0^1 \frac{e^{-x} \sin x}{x}$

Claramente $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} \sin x}{x} = 1$ por lo que la indeterminación es reparable $\Rightarrow \int_0^1 \frac{e^{-x} \sin x}{x}$ es propia (converge).

Para $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x} \sin x}{x}$ es importante notar que NO se pueden usar los criterios pues $\sin x$ no es positiva siempre.

$\Rightarrow$ Estudiamos convergencia absoluta:

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{e^{-x} \sin x}{x} \right| \leq \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}}_{(*)}$$

Basta notar que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x e^x}$, es decir el denominador es "muy alto".

Basta comparar con $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}$ (Al límite) el cual da 0

y como $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}$ converge $\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}$ también.

y por comparación $\int_1^{+\infty} \left| \frac{e^{-x} \sin x}{x} \right|$ también converge

es decir $\int_1^{+\infty} \left| \frac{e^{-x} \sin x}{x} \right|$ converge absolutamente lo cual

implica que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x} \sin x}{x}$ converge //.

$$\boxed{P2} \quad A = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x^2)}} = \underbrace{\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x(1-x^2)}}}_{\substack{22 \\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}}} + \underbrace{\int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)(1+x)}}}_{\substack{55 \\ \int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}}}$$

es decir sí lo Comparamos al límite

$$L1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{x} \sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1 \neq 0$$

$$L2 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\sqrt{x} \sqrt{1-x} \sqrt{1+x}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$$

Como $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x}}$ y $\int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ Convergen el Área también convergerá.

$$V_{OX} = \pi \int_0^1 \frac{1}{x(1-x)} dx = \pi \left(\underbrace{\int_0^{1/2} \frac{1}{x(1-x^2)}}_{\substack{55 \\ \int_0^{1/2} \frac{1}{x}}} + \underbrace{\int_{1/2}^1 \frac{1}{x(1-x)(1+x)}}_{\substack{55 \\ \int_{1/2}^1 \frac{1}{1-x}}} \right)$$

En forma análoga a la anterior y como $\int_0^{1/2} \frac{1}{x}$ y $\int_{1/2}^1 \frac{1}{1-x}$ divergen $\Rightarrow$ el V_{OX} también diverge. (Comparación al límite;

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Voy} &= 2\pi \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x(1-x^2)}} = 2\pi \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x^2)}} \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x} \sqrt{1+x}} dx \end{aligned}$$

Ahora la integral es solo impropia en $x=1$. y "se parece" en cómo se determina a $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, la cual converge (Verificar ese "se parece" con comparación al límite).

$\Rightarrow$ Voy converge.

$$\boxed{P3} \quad \vec{r}(t) = \left(\int_0^t \cos\left(\frac{u^2}{2c^2}\right) du, \int_0^t \sin\left(\frac{u^2}{2c^2}\right) du, 0 \right)$$

$$(a) \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\cos\left(\frac{t^2}{2c^2}\right), \sin\left(\frac{t^2}{2c^2}\right), 0 \right)$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| = \sqrt{\cos^2\left(\frac{t^2}{2c^2}\right) + \sin^2\left(\frac{t^2}{2c^2}\right) + 0^2} = 1$$

$\Rightarrow \vec{r}$ es (..) la Parametrización Natural.

el largo en función de t es $s(t) = \int_0^t \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| dt = t$.

$$\Rightarrow \boxed{s(t) = t}$$

$$(b) \quad \hat{T} = \frac{d\vec{r}}{dt} \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| = \left(\cos\left(\frac{t^2}{2c^2}\right), \sin\left(\frac{t^2}{2c^2}\right), 0 \right)$$

$$\hat{N} = \frac{d\hat{T}}{dt} \left\| \frac{d\hat{T}}{dt} \right\| \quad \text{y} \quad \frac{d\hat{T}}{dt} = \left(-\sin\left(\frac{t^2}{2c^2}\right) \cdot \frac{t}{c^2}, \cos\left(\frac{t^2}{2c^2}\right) \cdot \frac{t}{c^2}, 0 \right)$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{d\hat{T}}{dt} \right\| = \frac{t}{c^2}$$

$$\Rightarrow \hat{N} = \left(-\sin\left(\frac{t^2}{2c^2}\right), \cos\left(\frac{t^2}{2c^2}\right), 0 \right) \quad (6)$$

$$\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\left(\frac{t^2}{2c^2}\right) & \sin\left(\frac{t^2}{2c^2}\right) & 0 \\ -\sin\left(\frac{t^2}{2c^2}\right) & \cos\left(\frac{t^2}{2c^2}\right) & 0 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} \sin\left(\frac{t^2}{2c^2}\right) & 0 \\ \cos\left(\frac{t^2}{2c^2}\right) & 0 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} \cos\left(\frac{t^2}{2c^2}\right) & 0 \\ -\sin\left(\frac{t^2}{2c^2}\right) & 0 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} \cos\left(\frac{t^2}{2c^2}\right) & \sin\left(\frac{t^2}{2c^2}\right) \\ -\sin\left(\frac{t^2}{2c^2}\right) & \cos\left(\frac{t^2}{2c^2}\right) \end{vmatrix}$$

$$= \hat{k} \cdot 1 \quad (+0 \cdot \hat{j} + 0 \cdot \hat{i})$$

$$= (0, 0, 1)$$

Por último $\kappa(t) = \frac{\|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\|}{\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\|} = \frac{\frac{t}{c^2}}{1} = \frac{t}{c^2}$.

$$\tau(t) = 0 \quad (\text{Curva Plana}).$$

(c) $\Gamma' \ni \vec{r}'(t) = \left(\cos\left(\frac{t^2}{2c^2}\right), \sin\left(\frac{t^2}{2c^2}\right), 0 \right) =$

$$\gamma \quad \rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Para una curva parametrizada por $\vec{r}(t)$, la masa de un alambre, se calcula como:

$$M = \int_a^b \rho(\vec{r}(t)) \cdot \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| dt.$$

En este caso $\vec{r}'(t) = \left(\cos\frac{t^2}{2c^2}, \sin\left(\frac{t^2}{2c^2}\right), 0 \right)$

$$\Rightarrow \rho(\vec{r}(t)) = \rho\left(\cos\frac{t^2}{2c^2}, \sin\frac{t^2}{2c^2}, 0\right) = \cos^2\left(\frac{t^2}{2c^2}\right) + \sin^2\left(\frac{t^2}{2c^2}\right) + 0^2$$

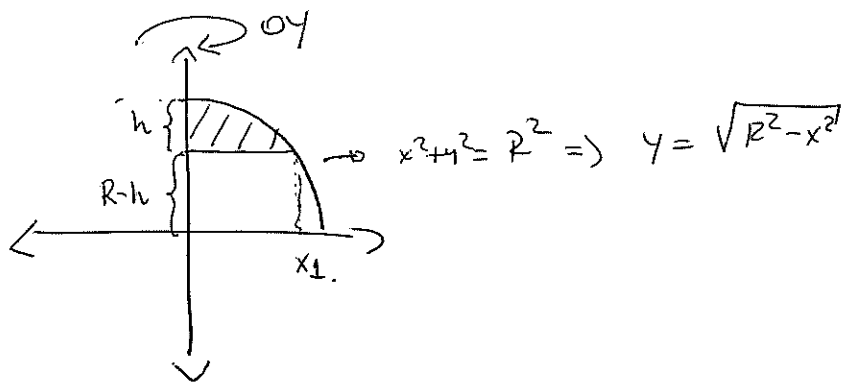
$$= 1.$$

$$\Rightarrow \text{Masa} = \int_0^a 1 \cdot \frac{t}{c^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{a^2}{c^2}, \quad \text{Nota } \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| = \frac{t}{c^2} \quad (\text{ya estaba calculado})$$

P4)



Dibujando en 2-D :



el casquete se forma por la rotación de la región sombreada en torno a OY $\Rightarrow$

$$A = 2\pi \int_0^{x_1} x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

con $f(x) = (\sqrt{R^2 - x^2})$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \Rightarrow f'^2(x) = \frac{x^2}{R^2 - x^2}$$

$$\Rightarrow 1 + f'^2(x) = \frac{R^2}{R^2 - x^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + f'^2(x)} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

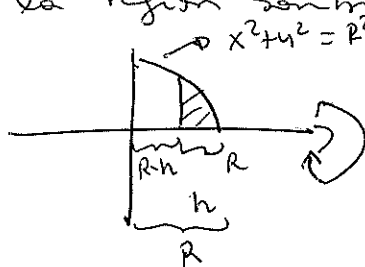
Así $A = 2\pi R \int_0^{x_1} \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx$

con el cambio

$$u = R^2 - x^2 \Rightarrow \frac{du}{-2} = x dx$$

resuelvan ustedes el resto...

Otra forma es rotar la región sombreada en torno a OX



P5) (a) $\alpha \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \Rightarrow f'(x) = -\alpha x^{-\alpha-1}$

$$S_{0x} = 2\pi \int_1^{+\infty} f(x) \cdot \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

$$= 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \cdot \sqrt{1 + (\alpha x^{-\alpha-1})^2} dx$$

$$= 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \cdot \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{x^{2(\alpha+1)}}} dx$$

$$= 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \cdot \sqrt{\frac{x^{2(\alpha+1)} + \alpha^2}{x^{2(\alpha+1)}}} dx$$

$$= 2\pi \underbrace{\int_1^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{x^\alpha}}_{\text{polinomio de grado } \approx \alpha} \cdot \frac{\sqrt{x^{2(\alpha+1)} + \alpha^2}}{\sqrt{x^{2(\alpha+1)}}} dx}_{\text{polinomio de grado } \approx \alpha+1} \rightarrow \text{polinomio de grado } \approx \alpha+1$$

$$\approx \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

Comparando, al límite, se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^\alpha} \cdot \frac{\sqrt{x^{2(\alpha+1)} + \alpha^2}}{\sqrt{x^{2(\alpha+1)}}}}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^{2(\alpha+1)} + \alpha^2}{x^{2(\alpha+1)}}} = 1 \neq 0$$

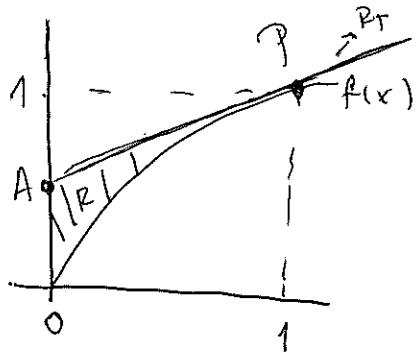
$\Rightarrow$ Ambas convergen o ambas divergen, pero $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$

Converge ssi $\alpha > 1$ y diverge ssi $\alpha \leq 1 \Rightarrow$

" S_{0x} " también (Converge $\alpha > 1$
Diverge $\alpha \leq 1$).

(a)

(b) Como $\alpha = -\frac{2}{3} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^{-2/3}} = x^{2/3}$



$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3} x^{-1/3}$$

$$\Rightarrow (f'(x))^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 x^{-2/3}$$

$$\Rightarrow 1 + (f'(x))^2 = 1 + \frac{4}{9} x^{-2/3}$$

el largo de curva es $L_1 = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$

$$= \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{4}{9} x^{-2/3}} dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{\frac{x^{2/3} + 4/9}{x^{2/3}}} dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{x^{2/3} + 4/9} x^{-1/3} dx$$

Ponemos $u = x^{2/3} + 4/9 \Rightarrow du = \frac{2}{3} x^{-1/3} dx$
 $\frac{3du}{2} = x^{-1/3} dx$

~~u = x^{2/3} + 4/9~~

$x=0 \Rightarrow u = 4/9$

$x=1 \Rightarrow u = 1 + 4/9 = 13/9$

$$\Rightarrow L_1 = \int_{4/9}^{13/9} \sqrt{u} \frac{3}{2} du = \frac{3}{2} \int_{4/9}^{13/9} \sqrt{u} du = \frac{3}{2} \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} \Big|_{4/9}^{13/9}$$

$$= \left(\frac{13}{9}\right)^{3/2} - \left(\frac{4}{9}\right)^{3/2}$$

$$L_1 = \frac{\sqrt{13^3} - 8}{27}$$

La recta tangente será

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{con } x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1$$

(1,1) $f'(x_0)$

$$\Rightarrow \text{Como } f'(x) = \frac{2}{3} x^{-4/3} \Rightarrow f'(1) = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \text{Recta tangente: } y - 1 = \frac{2}{3} (x - 1)$$

las coordenadas de el punto A (intersección con OY)
se calculan cuando $x = 0$

$$\Rightarrow y - 1 = \frac{2}{3} \cdot -1 \Rightarrow y = \frac{1}{3}$$

el largo del trazo sera la distancia entre A y P.

$$A = (0, \frac{1}{3}) \quad y \quad P = (1, 1)$$

$$\Rightarrow d(A, P) = \sqrt{(0-1)^2 + (\frac{1}{3}-1)^2} = \sqrt{1 + (\frac{4}{9})} = \frac{1}{3} \sqrt{13}$$

Por último el trazo $\overline{OA}$ mide la distancia entre O y A
 $O = (0, 0) \quad A = (0, \frac{1}{3})$

$$\Rightarrow d(O, A) = \frac{1}{3}$$

de esta forma el Perímetro de R, formado por
la figura que va desde $\overline{OP} \cup \overline{PA} \cup \overline{AO}$ es la
suma de las 3 longitudes encontradas

$$\Rightarrow \text{Perímetro}(R) = \frac{1}{3} \sqrt{13} + \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{13^3} - 8}{9} \quad \square$$

Hints para propuestas:

Propuesta 1: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ diverge claramente
(exponencial en numerador)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^2} dt$$

y poniendo $u = -t \Rightarrow du = -dt$

$$I = - \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{1+u^2} du$$

esta integral converge.

Propuesta 2: Integrando por partes con $u = \frac{1}{x^\alpha} \Rightarrow du = \frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}}$
 $dv = f' \Rightarrow v = f,$

$$\int_a^{\infty} \frac{f'}{x^\alpha} = \lim_{C \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{f(x)}{x^\alpha} \right) \Big|_a^C \right] + \alpha \int_a^{\infty} \frac{f(x)}{x^{\alpha+1}} dx$$

verifiquen que esto efectivamente converge si $\alpha > 0$

OJO: no se pide que concluyan que $\alpha > 0$, es al revés
se piden que concluyan que si $\alpha > 0 \Rightarrow$ converge