**MA1002-6: Cálculo Diferencial e Integral.**
**Profesor:** Daniel Remenik Z.
**Auxiliar:** Ítalo Riarte C.
**Primavera 2012**

# Resumen Control 3

**Aplicaciones de la Integral (Semana 10):**

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx \qquad S_{OX} = 2\pi \int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx \qquad S_{OY} = 2\pi \int_a^b x\cdot\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(f(\theta)\right)^2 d\theta \qquad X_G = \frac{M_{OY}}{A} = \frac{\int_a^b x f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx} \qquad Y_G = \frac{M_{OX}}{A} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

$$V_{OX} = \pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx \qquad V_{OY} = 2\pi\int_a^b x f(x)\,dx$$ (siempre es bueno recordar estas 2)

**Curvas (Semana 11 y 12):**

$$s(t) = \int_a^t \left\|\frac{d\vec{r}}{d\tau}\right\| d\tau \qquad \hat{T} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Big/ \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\| \qquad \hat{N} = \frac{d\hat{T}}{dt} \Big/ \left\|\frac{d\hat{T}}{dt}\right\|$$

$$\hat{B} = \hat{T}\times\hat{N} \qquad \kappa = \left\|\frac{d\hat{T}}{dt}\right\| \Big/ \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\| \qquad \tau = -\hat{N}(t)\cdot\frac{d\hat{B}}{dt} \Big/ \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\|$$

- **Fórmulas de Frenet** : • $\frac{d\hat{T}}{ds} = \kappa\hat{N}$ • $\frac{d\hat{N}}{ds} = -\kappa\hat{T}+\tau\hat{B}$ • $\frac{d\hat{B}}{ds} = -\tau\hat{N}$.
- **Integrales sobre Curvas** : $\int_\Gamma f\,d\ell = \int_a^b f(\vec{r}(t))\cdot\left\|\frac{dr}{dt}\right\| dt$

→ Aplicaciones: • Masa : $M = \int_\Gamma \rho\,d\ell = \int_a^b \rho(\vec{r}(t))\cdot\left\|\frac{dr}{dt}\right\| dt$, donde $\rho$ representa la densidad lineal de masa.

• Centro de Masa: $X_G = \frac{1}{M}\int_\Gamma x\rho\,d\ell$, $Y_G = \frac{1}{M}\int_\Gamma y\rho\,d\ell$, $Z_G = \frac{1}{M}\int_\Gamma z\rho\,d\ell$.

**Integrales Impropias (Semana 13)**

Se detallan los criterios para integrales de primera especie, pues para los de segunda son análogos.

- **Comparación** : $0\le f(x)\le g(x)$ : Si $\int_a^{+\infty} g$ converge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f$ converge.

  Si $\int_a^{+\infty} f$ diverge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g$ diverge.

- **Comparación al Límite** : Se calcula $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

  $*$ Si $L \neq 0$, entonces $\int_a^{+\infty} f$ y $\int_a^{+\infty} g$ se comportan de la misma forma (ambas convergen o divergen).

  $*$ Si $L = 0$, entonces a partir de cierto punto $f \leq g$, entonces por comparación:

  $$\text{Si } \int_a^{+\infty} g \text{ converge} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f \text{ converge. Si } \int_a^{+\infty} f \text{ diverge} \Rightarrow \int_a^{+\infty} g \text{ diverge.}$$

  $*$ Si $L = +\infty$, entonces a partir de cierto punto $f \geq g$, entonces por comparación:

  $$\text{Si } \int_a^{+\infty} f \text{ converge} \Rightarrow \int_a^{+\infty} g \text{ converge. Si } \int_a^{+\infty} g \text{ diverge} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f \text{ diverge.}$$

  **Nota** : Para integrales de segunda especie el criterio es el mismo, pero se calcula $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

- **Convergencia Absoluta** : Se dice que $\int_a^{+\infty} f$ converge absolutamente ssi $\int_a^{+\infty} \left|f\right|$ converge.

  $$\text{Si } \int_a^{+\infty} f \text{ converge absolutamente} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f \text{ converge.}$$

- **Comportamiento Conocido de Integrales Impropias** : Se considera conocido el comportamiento de,

  $$I = \int_a^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ y } J = \int_a^{b} \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx$$

  $*\, I$ es de primera especie. Converge para $\alpha > 1$ y diverge para $\alpha \leq 1$.

  $*\, J$ es de segunda especie. Converge para $\alpha < 1$ y diverge para $\alpha \geq 1$.

**Nota:** Dado que el comportamiento de $I$ y $J$ es conocido, usualmente en el criterio de **comparación al límite** se escoge como $g$ como $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Con algún valor de α adecuado.