MA1002-6: Cálculo Diferencial e Integral.
Profesor: Daniel Remenik Z.
Auxiliar: Ítalo Riarte C.
Primavera 2012

Auxiliar 13: Integrales Impropias.

P2. (a) Pruebe que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ es convergente.

Verificando la convergencia absoluta, se tiene que

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx = \int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2}\,dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

Como la última integral converge, por el criterio de comparación $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx$ converge también,

es decir $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ es absolutamente convergente lo que implica que converge.

(b) Usando la parte (a), pruebe que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ es convergente.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \int_0^{1} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$$

La primera integral es reparable en 0 por lo que es una integral propia, es decir, converge.

para la segunda, integrando por partes:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = -\frac{\cos x}{x}\bigg|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx = \underbrace{\frac{\cos(1)}{1}}_{\in\mathbb{R}} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

Finalmente por la parte anterior: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$, es convergente, por lo cual $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ converge también

P3. Analice la convergencia de las siguientes integrales impropias:

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$

$$\int_1^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{x\cdot x}{(1+x^2)^2}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{x^2}{(0+x^2)^2}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

la última integral es convergente, lo cual, por comparación implica que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$, converge.

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x^2)}}\,dx$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}} = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}} + \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}} = \underbrace{\int_0^{1/2} \frac{\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}}{\sqrt{x}}}_{I_1} + \underbrace{\int_{1/2}^1 \frac{\frac{dx}{\sqrt{x}}}{\sqrt{(1-x^2)}}}_{I_2}$$

Claramente los numeradores de I_1 e I_2 están acotados en los intervalos correspondientes:

Por ejemplo, para $\dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} \le \dfrac{1}{\sqrt{(1-(1/2)^2)}}$ para $x \in [0,1/2]$ y $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \le \dfrac{1}{\sqrt{1/2}}$ para $x \in [1/2,1]$. Así:

$I_1 \le \frac{1}{\sqrt{(1-(1/2)^2)}} \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ La cual converge $(\alpha = \frac{1}{2})$.

Recordando que $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{(1+x)}}}{\sqrt{(1-x)}}$ y que para $x \in [1/2,1]$: $\frac{\frac{1}{\sqrt{(1+x)}}}{\sqrt{(1-x)}} \le \frac{\frac{1}{\sqrt{(1+1/2)}}}{\sqrt{(1-x)}}$ Se tiene que:

$I_2 \le \frac{1}{\sqrt{1/2}} \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1/2}} \int_{1/2}^1 \frac{\frac{dx}{\sqrt{1+x}}}{\sqrt{1-x}} \le \frac{1}{\sqrt{1/2}} \frac{1}{\sqrt{1+(1/2)}} \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ la cual converge $(\alpha = \frac{1}{2})$.

Así como $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}} = I_1 + I_2$ y ambas convergen, su suma también converge.

Nota : En la clase el desarrollo de este problema fue distinto. Las integrales I_1 e I_2, se compararon al límite con las integrales $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ y $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ respectivamente, concluyendo lo mismo.

(c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2\sqrt[3]{x}}{(x^4+x)^{\frac{2}{3}}}\,dx$

Como el grado del numerador es $\frac{7}{3}$ y el denominador es $\frac{8}{3}$ el integrando "se parece" a un polinomio de grado $\frac{7}{3}$-$\frac{8}{3}$=-$\frac{1}{3}$. Por lo tanto se comparará al límite con $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{-\frac{1}{3}}\,dx$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2\sqrt[3]{x}}{(x^4+x)^{\frac{2}{3}}}}{x^{-\frac{1}{3}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x^4)^{\frac{2}{3}}}{(x^4+x)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^4}{x^4+x}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 \ne 0.$$

Por el criterio de comparación al límite ambas integrales se comportan de la misma forma,

Como $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{-\frac{1}{3}}\,dx$ diverge, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2\sqrt[3]{x}}{(x^4+x)^{\frac{2}{3}}}\,dx$ también diverge

(d) $\displaystyle\int_0^{2\ln a} \frac{1}{e^x - a^2 e^{-x}}\,dx$, con $a > 0$ y $a \neq 1$.

Ojo con esta integral, no tiene indeterminaciones ni en $x = 0$, ni en $x = 2\ln a$. Esto no significa que la integral converge necesariamente, pues puede que exista un $x_0 \in [0, 2\ln a]$, que anule el denominador. En este caso en $x = \ln a$ se ve que el denominador del integrando, se anula.

Para simplificar cálculos, haremos un cambio de variable: $u = e^x \Rightarrow \dfrac{du}{u} = dx$. Con esto:

$$\int_0^{2\ln a} \frac{1}{e^x - a^2 e^{-x}}\,dx = \int_1^{a^2} \frac{1}{u - a^2 u^{-1}}\frac{du}{u} = \int_1^{a^2} \frac{1}{u^2 - a^2}\,du = \int_1^{a^2} \frac{1}{(u-a)(u+a)}\,du = \frac{1}{2a}\int_1^{a^2} \frac{1}{u-a} - \frac{1}{u+a}\,du$$

Aquí se deben analizar dos casos, el caso en que $a > 1$ y el caso en que $a \in (0,1)$.

- Caso en que $a > 1$. En tal caso: $1 < a < a^2$ y $\displaystyle\int_1^{a^2} \frac{1}{u-a}\,du = \int_1^{a} \frac{1}{u-a}\,du + \int_a^{a^2} \frac{1}{u-a}\,du.$

  Estas últimas dos integrales divergen (caso $\alpha = 1$), por lo cual $\displaystyle\frac{1}{2a}\int_1^{a^2} \frac{1}{u-a} - \frac{1}{u+a}\,du$, diverge.

- Caso en que $a \in (0,1)$. En tal caso: $a^2 < a < 1$ y $\displaystyle\frac{1}{2a}\int_1^{a^2} \frac{1}{u-a}\,du = -\frac{1}{2a}\int_{a^2}^{1} \frac{1}{u-a}\,du$

  La cual diverge, en forma análoga a la anterior (caso $\alpha = 1$).

En resumen, la integral $\displaystyle\int_0^{2\ln a} \frac{1}{e^x - a^2 e^{-x}}\,dx$ siempre diverge para $a > 0$ y $a \neq 1$.

(e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{e^x + x}\,dx$

Esta integral tiene un polinomio en el numerador y una exponencial en el denominador, por lo que el denominador es "mucho más potente" que el denominador.

Compararemos al límite, con la función $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{x+1}{e^x + x}}{\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(x+1)}{e^x + x} = 0,$$ (recordar que la exponencial le "gana" a cualquier polinomio)

El criterio de comparación **no** nos dice qué pasa si el límite anterior es 0, pero se puede interpretar así

Si $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, entonces en algún momento debe tenerse que $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 1$. Esto se anota así:

$$\exists M > 0 \text{: tal que } f(x) < g(x), \forall x > M.$$

es decir $\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{e^x+x}dx = \int_1^{M} \frac{x+1}{e^x+x}dx + \int_M^{+\infty} \frac{x+1}{e^x+x}dx.$

La primera integral converge por ser integral de riemann (propia) y la segunda es menor que $\int_M^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ (porque $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$). Esta última integral converge, entonces, por comparación $\int_M^{+\infty} \frac{x+1}{e^x+x}dx$, converge, entocnes $\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{e^x+x}dx$ converge también.

(f) $\int_1^{+\infty} \frac{e^x+1}{e^x+x}dx$

En este caso el numerador y denominador son "similares" pues ambos tienen una exponencial en sus expresiones. Se comparará al límite entonces con la función $g(x) = \frac{1}{x}$.

$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x+1}{e^x+x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(e^x+1)}{e^x+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{xe^x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{e^x}} = \frac{1+0}{0+0} = +\infty$. El criterio de comparación nuevamente no dice nada respecto a esto, pero al igual que en la parte anterior, puede interpretarse como que la función $\frac{e^x+1}{e^x+x}$, en algún momento será mayor que la función $\frac{1}{x}$. En forma análoga a la anterior, y considerando que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$, diverge entonces con mayor razón la integral $\int_1^{+\infty} \frac{e^x+1}{e^x+x}dx$ (que es más grande que la anterior) diverge también.

Nota : En las partes (e) y (f), se podría haber llegado a las mismas conclusiones con comparaciones más simples, pero quería que supieran interpretar correctamente los casos en que la comparación al límite, daba un límite 0 o bien $+\infty$. Notar que todo fue válido, considerando que las funciones involucradas eran positivas en los intervalos respectivos.

P4. Determine los valores de $p \in \mathbb{R}$, para los cuales las siguientes integrales convergen.

(a) $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x\ln x(1+\ln(\ln x))^p}dx$

Haciendo $u = 1+\ln(\ln x) \Rightarrow du = \frac{1}{x\ln x}dx$, cambiando los límites de integración, cuando $x = 3 \Rightarrow u = 1+\ln(\ln 3) > 0$ y $x = +\infty \Rightarrow u = +\infty$. así la integral se convierte en:

$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x\ln x(1+\ln(\ln x))^p}dx = \int_{1+\ln(\ln 3)}^{+\infty} \frac{1}{u^p}du$. Esta integral converge ssi $p > 1$.

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{x^p \ln x}\, dx$

Este problema es difícil, debe tenerse en cuenta que la integral tiene problemas tanto en 0, como en 1
Queda propuesto, para los que quieran saber la respuesta, la integral converge si $p \in (0,1)$ y diverge si $p \geq 1$.