MA1002-6: Cálculo Diferencial e Integral.
Profesor: Daniel Remenik Z.
Auxiliar: Ítalo Riarte C.
Primavera 2012

Pauta Parcial Auxiliar 12: Curvas en $\mathbb{R}^3$ (II).

P3. Calcule la masa total y centro de masa del alambre parametrizado por $\vec{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ con $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, cuya densidad de masa está dada por $\rho(x, y, z) = z(x^2 + y^2)$.

Sólo mirando el formulario la masa del alambre es:

$$M = \int_\Gamma \rho\, d\ell = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho(\vec{r}(t)) \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho(\cos t, \operatorname{sen} t, t) \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2}\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)\sqrt{1+1}\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\,\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{8}$$

Por definición las coordenadas del centro de gravedad son:

- $$X_G = \frac{1}{M}\int_\Gamma x\rho\, d\ell = \frac{8}{\pi^2\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \rho(\cos t, \operatorname{sen} t, t)\sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2}\, dt$$

$$= \frac{8}{\pi^2\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot t(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)\sqrt{2}dt$$

$$= \frac{8}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t dt \overbrace{=}^{\text{por partes}} \frac{8}{\pi^2}\left((t \operatorname{sen} t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} t dt \right) = \frac{8}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 4\frac{\pi - 2}{\pi^2}$$

- $$Y_G = \frac{1}{M}\int_\Gamma y\rho\, d\ell = \frac{8}{\pi^2\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} t \cdot \rho(\cos t, \operatorname{sen} t, t)\sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2}\, dt$$

$$= \frac{8}{\pi^2\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} t \cdot t(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)\sqrt{2}dt$$

$$= \frac{8}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\operatorname{sen} t dt \overbrace{=}^{\text{por partes}} \frac{8}{\pi^2}\left((-t \cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt \right) = \frac{8}{\pi^2}\left(0 + 1\right) = \frac{8}{\pi^2}$$

- $$Z_G = \frac{1}{M}\int_\Gamma z\rho\, d\ell = \frac{8}{\pi^2\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} t \cdot \rho(\cos t, \operatorname{sen} t, t)\sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2}\, dt$$

$$= \frac{8}{\pi^2\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cdot t(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)\sqrt{2}dt$$

$$= \frac{8}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 dt = \frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3} = \frac{\pi}{3}$$

P4. Sea una función $g:[1,\infty)\to(0,\infty)$, tal que para $t>1$, $g'(t)>0$ y $\lim\limits_{t\to\infty} g(t)=M>0$. Considere la curva $\Gamma\subseteq\mathbb{R}^3$, parametrizada por $\vec{r}(t)=\big(\cos(g(t)),\operatorname{sen}(g(t)),1\big)$ con $t>1$.

(a) Encuentre el largo total de la curva Γ y la parametrización en longitud de arco.

- $\dfrac{d\vec{r}}{dt}=\big(-\operatorname{sen}(g(t))\cdot g'(t),\cos(g(t))\cdot g'(t),0\big)=g'(t)\big(-\operatorname{sen}(g(t)),\cos(g(t)),0\big)$
- $\left\|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right\|=\left\|g'(t)\big(-\operatorname{sen}(g(t)),\cos(g(t)),0\big)\right\|=g'(t)\sqrt{\operatorname{sen}^2(g(t))+\cos^2(g(t))+0^2}=g'(t).$

$\Rightarrow s(t)=\displaystyle\int_1^t\left\|\frac{d\vec{r}}{d\tau}\right\|d\tau=\int_1^t g'(\tau)d\tau=g(\tau)\Big|_1^t=g(t)-g(1)$

El largo total será $\lim\limits_{t\to\infty}s(t)=\lim\limits_{t\to\infty}g(t)-g(1)=M-g(1)$.

Para encontrar la parametrización en longitud de arco, encontramos la funcion $t(s)$

$s(t)=g(t)-g(1)\Leftrightarrow g(t)=s(t)+g(1)\Rightarrow t(s)=g^{-1}(s+g(1))$, por lo cual la parametrización en longitud de arco es:

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}(s)=\vec{r}(t(s))&=\big(\cos g(g^{-1}(s+g(1))),\operatorname{sen} g(g^{-1}(s+g(1))),1\big)\\&=\big(\cos(s+g(1)),\operatorname{sen}(s+g(1)),1\big)\end{aligned}$$

queda propuesto, comprobar que efectivamente, $\left\|\dfrac{d\vec{\sigma}}{ds}\right\|=1$

(b) Encuentre los vectores $\hat{T}$, $\hat{N}$ y $\hat{B}$.

Por definición $\hat{T}(t)=\dfrac{g'(t)\big(-\operatorname{sen}(g(t)),\cos(g(t)),0\big)}{g'(t)}=\big(-\operatorname{sen}(g(t)),\cos(g(t)),0\big)$

Para el vector normal, previamente calculamos:

$\dfrac{d\hat{T}}{dt}=\big(-\cos(g(t))\cdot g'(t),-\operatorname{sen}(g(t))\cdot g'(t),0\big)=g'(t)\big(-\cos(g(t)),-\operatorname{sen}(g(t)),0\big)$

$\left\|\dfrac{d\hat{T}}{dt}\right\|=\left\|g'(t)\big(-\operatorname{sen}(g(t)),\cos(g(t)),0\big)\right\|=g'(t)\sqrt{\operatorname{sen}^2(g(t))+\cos^2(g(t))+0^2}=g'(t)$

$\Rightarrow \hat{N}(t)=\dfrac{g'(t)\big(-\cos(g(t)),-\operatorname{sen}(g(t)),0\big)}{g'(t)}=\big(-\cos(g(t)),-\operatorname{sen}(g(t)),0\big)$

Para el binormal sólo se debe calcular, $\hat{B}=\hat{T}\times\hat{N}=\big(-\operatorname{sen}(g(t)),\cos(g(t)),0\big)\times\big(-\cos(g(t)),-\operatorname{sen}(g(t)),0\big)$

Esto lo haremos con el siguiente esquema, recordando que $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc:$

$$\hat{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\operatorname{sen}(g(t)) & \cos(g(t)) & 0 \\ -\cos(g(t)) & -\operatorname{sen}(g(t)) & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} \cos g(t) & 0 \\ -\operatorname{sen} g(t) & 0 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} -\operatorname{sen} g(t) & 0 \\ -\cos g(t) & 0 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} -\operatorname{sen} g(t) & \cos g(t) \\ -\cos g(t) & -\operatorname{sen} g(t) \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\cdot 0 - \hat{j}\cdot 0 + \hat{k}\cdot(\operatorname{sen}^2 g(t) + \cos^2 g(t)) = \hat{k}.$$

$\Rightarrow \hat{B}(t) = \hat{k} = (0,0,1)$. Este resultado era esperable, ya que como la curva es plana, los vectores Tangente ($\hat{T}$) y Normal ($\hat{N}$), "viven" en el plano, por lo cual un vector perpendicular a ambos debe salir del plano. De todas formas otro candidato a ser vector binormal era $-\hat{k}$, por lo que es bueno hacer el cálculo.

(c) Calcule la curvatura $\kappa(t)$ y la torsión $\tau(t)$ para cada $t > 1$.

En base a cálculos anteriores y notando que $\dfrac{d\hat{B}}{dt} = (0,0,0)$, se tiene de inmediato que

$$\kappa(t) = \frac{g'(t)}{g'(t)} = 1$$

$$\tau(t) = -\Big(-\cos(g(t)), -\operatorname{sen}(g(t)), 0\Big)\cdot(0,0,0)\cdot\frac{1}{g'(t)} = 0$$

Ojo que notando que la curva es plana, podrían haber dicho sin necesidad de cálculos que $\tau(t) = 0$.

P5. Demuestre que $\dfrac{d\vec{r}}{ds}\cdot\left[\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2}\times\dfrac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right] = \tau\kappa^2$, donde s es el parámetro de longitud de arco.

En primer lugar, dado que s es el parámetro de longitud de arco, $\dfrac{d\vec{r}}{ds} = \hat{T}$

Recordando las fómulas de Frenet: • $\dfrac{d\hat{T}}{ds} = \kappa\hat{N}$ • $\dfrac{d\hat{N}}{ds} = -\kappa\hat{T} + \tau\hat{B}$ • $\dfrac{d\hat{B}}{ds} = -\tau\hat{N}$.

• $\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{d\vec{r}}{ds}\right) = \dfrac{d}{ds}\left(\hat{T}\right) = \kappa\hat{N}$.

• $\dfrac{d^3\vec{r}}{ds^3} = \dfrac{d}{ds}\left(\kappa\cdot\hat{N}\right) = \hat{N}\cdot\dfrac{d}{ds}\left(\kappa\right) + \kappa\cdot\dfrac{d}{ds}\left(\hat{N}\right) = \hat{N}\cdot\kappa' + \kappa\cdot(-\kappa\hat{T} + \tau\hat{B}) = \hat{N}\cdot\kappa' - \kappa^2\hat{T} + \kappa\tau\hat{B}$.

$$\Rightarrow \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\times\frac{d^3\vec{r}}{ds^3} = \kappa\hat{N}\times(\hat{N}\cdot\kappa' - \kappa^2\hat{T} + \kappa\tau\hat{B}) = \kappa\kappa'(\underbrace{\hat{N}\times\hat{N}}_{0}) - \kappa^3(\underbrace{\hat{N}\times\hat{T}}_{-\hat{B}}) + \kappa^2\tau(\underbrace{\hat{N}\times\hat{B}}_{\hat{T}}) = \kappa^3\hat{B} + \kappa^2\tau\hat{T}$$

Por último: $\dfrac{d\vec{r}}{ds}\cdot\left[\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2}\times\dfrac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right] = \hat{T}\cdot(\kappa^3\hat{B} + \kappa^2\tau\hat{T}) = \kappa^3(\underbrace{\hat{T}\cdot\hat{B}}_{0}) + \kappa^2\tau(\underbrace{\hat{T}\cdot\hat{T}}_{1}) = \kappa^2\tau$.

Nota : Para el desarrollo anterior, se usaron continuamente las propiedades del producto cruz y producto punto, como la distributividad, que $\hat{u}\times\hat{u} = 0$ y que $\hat{u}\cdot\hat{u} = 1$, donde $\hat{u}$ es cualquier vector unitario.