MA1002-6: Cálculo Diferencial e Integral.
Profesor: Daniel Remenik Z.
Auxiliar: Ítalo Riarte C.
Primavera 2012

Auxiliar 12: Curvas en $\mathbb{R}^3$ (II).

Formulario : Sea $\vec{r}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ una parametrización al menos 2 veces derivable, de la curva simple Γ:

- $s(t)=\int_a^t\left\|\frac{d\vec{r}}{d\tau}\right\|d\tau$
- $\hat{T}=\frac{d\vec{r}}{ds}=\frac{d\vec{r}}{dt}/\left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\|$
- $\hat{N}=\frac{d\hat{T}}{ds}/\left\|\frac{d\hat{T}}{ds}\right\|=\frac{d\hat{T}}{dt}/\left\|\frac{d\hat{T}}{dt}\right\|$
- $\kappa=\left\|\frac{d\hat{T}}{ds}\right\|=\left\|\frac{d\hat{T}}{dt}\right\|/\left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\|$
- $\hat{B}=\hat{T}\times\hat{N}$
- $\tau=-\hat{N}(s)\cdot\frac{d\hat{B}}{ds}=-\hat{N}(t)\cdot\frac{d\hat{B}}{dt}/\left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\|$

Fórmulas de Frenet : • $\frac{d\hat{T}}{ds}=\kappa\hat{N}$ • $\frac{d\hat{N}}{ds}=-\kappa\hat{T}+\tau\hat{B}$ • $\frac{d\hat{B}}{ds}=-\tau\hat{N}.$

Integrales sobre Curvas : Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, continua y $\vec{r}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, una parametrización regular de Γ :

$$\int_\Gamma f\,d\ell=\int_a^b f(\vec{r}(t))\cdot\left\|\frac{dr}{dt}\right\|dt$$

$\to$ Aplicaciones: • Masa : $M=\int_\Gamma\rho\,d\ell=\int_a^b\rho(\vec{r}(t))\cdot\left\|\frac{dr}{dt}\right\|dt$, donde ρ representa la densidad lineal de masa.

• Centro de Masa: $X_G=\frac{1}{M}\int_\Gamma x\rho\,d\ell,\quad Y_G=\frac{1}{M}\int_\Gamma y\rho\,d\ell,\quad Z_G=\frac{1}{M}\int_\Gamma z\rho\,d\ell.$

P1. Sean γ_1 y γ_2 definidas, respectivamente por:

$$\vec{r}_1(t)=(t,f(t))\qquad\qquad \vec{r}_2(t)=(t,f(t)\operatorname{sen}(at))$$

Donde $a>0$ y $f:[a,b]\to(0,\infty)$ una función real de clase C^2.

(a) Pruebe que γ_1 y γ_2 son tangentes en sus puntos de intersección.

(b) Demuestre que γ_1 (Parametrizado por $\vec{r}_1$) tiene curvatura 0 en t_0 ssi f tiene un punto de inflección en t_0.

P2. Considere la curva Γ, parametrizada por $\vec{r}(t)=(e^{-t}\cos t,e^{-t}\operatorname{sen}t,e^{-t})$ con $t>0$.

(a) Pruebe que la curva Γ, está contenida en el cono de ecuación $x^2+y^2=z^2$.

(b) Pruebe que el vector tangente, forma un ángulo constante con el vector $\frac{\vec{r}(t)}{\|\vec{r}(t)\|}$ en cada punto de la curva.

(c) Calcule el largo $L(\Gamma)$ de la curva en función de t. En particular, calcule el largo para el instante en que la altura se reduce a la mitad de la inicial y calcule $\lim_{t\to\infty} L(\Gamma)$.

(d) Indique cuál es la parametrización natural de Γ.

(e) Calcule los vectores Normal $N(t)$ y Binormal $B(t)$. Además, calcule la Curvatura $\kappa(t)$ y la Torsión $\tau(t)$ para cada $t > 0$.

P3. Calcule la masa total y centro de masa del alambre parametrizado por $\vec{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ con $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, cuya densidad de masa está dada por $\rho(x, y, z) = z(x^2 + y^2)$.

P4. Demuestre que $\dfrac{d\vec{r}}{ds} \cdot \left[\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2} \times \dfrac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right] = \tau\kappa^2$, donde s es el parámetro de longitud de arco.

P5. Sea una función $g : [1, \infty) \to (0, \infty)$, tal que para $t > 1$, $g'(t) > 0$ y $\lim_{t\to\infty} g(t) = M > 0$. Considere la curva $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$, parametrizada por $\vec{r}(t) = \big(\cos(g(t)), \operatorname{sen}(g(t)), 1\big)$ con $t > 1$.

(a) Encuentre el largo total de la curva Γ y la parametrización en longitud de arco.

(b) Encuentre los vectores $\hat{T}$, $\hat{N}$ y $\hat{B}$.

(c) Calcule la curvatura $\kappa(t)$ y la torsión $\tau(t)$ para cada $t > 1$.