

MA1002-6: Cálculo Diferencial e Integral.

Profesor: Daniel Remenik Z.

Auxiliar: Ítalo Riarte C.

Primavera 2012



Auxiliar 10: Aplicaciones de la Integral (II).

Fórmulas :

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$$S_{OX} = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$$S_{OY} = 2\pi \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (f(\theta))^2 d\theta$$

$$X_G = \frac{M_{OY}}{A} = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

$$Y_G = \frac{M_{OX}}{A} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b (f(x))^2 dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

P1. Considere la curva conocida como *astroide*, de ecuación $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, para $a > 0$. Se pide determinar:

- (a) La superficie del sólido generado al rotar en torno al eje OX la región \mathcal{R} limitada por el astroide en el primer cuadrante.
- (b) Una expresión que permita calcular el perímetro de la región \mathcal{R} (no lo calcule).

P2. Determine el centro de gravedad de la región que la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, encierra en el primer cuadrante.

P3. Considere $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1(\mathcal{A})$. Considere que $\mathcal{L}(a, x)$ es el largo de la curva en el intervalo $[a, x] \subset \mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ y que $\mathcal{S}(a, x)$ es el segmento que une los puntos $(a, f(a))$ con $(x, f(x))$. Calcule,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\mathcal{L}(a, x)}{\mathcal{S}(a, x)}$$

P4. Hallar el área de $\rho(\theta) = 2a \cos(3\theta)$ que queda fuera del círculo de ecuación $\rho = a$. Donde $a > 0$.

Nota : Las curvas fueron expresadas en coordenadas polares.

P5. Un trompo se genera por la rotación en torno al eje OX de la curva $OABCD$ mostrada en la figura.

- (a) Escriba, en términos de los datos R y φ , las ecuaciones de las funciones que definen los tramos OA , AB y BC de la curva y encuentre las coordenadas de los puntos A , B y C .
- (b) Escriba las 4 expresiones que permiten calcular el área total de la superficie exterior del trompo y calcúlelas

