MA1002-6: Cálculo Diferencial e Integral.
Profesor: Daniel Remenik Z.
Auxiliar: Ítalo Riarte C.
Primavera 2012

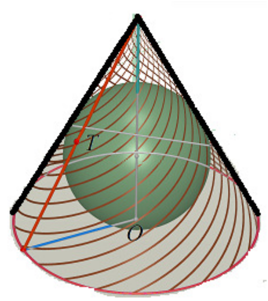
Auxiliar 9: Aplicaciones de la Integral y Repaso Control 2

P1. Calcule las siguientes primitivas

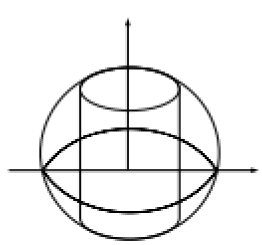
(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{3-4x-2x^2}}\,dx$ (b) $\displaystyle\int x\arctan(2x)\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-3)^2\cdot(2x+1)^2\cdot(x-1)}\,dx$ (d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{x+3}+1}\,dx$

P2. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, integrable en $[a,b]$. Pruebe que la función $g:[-b,-a]\to\mathbb{R},$ donde $g(x)=f(-x)$ es Riemann-Integrable en $[-b,-a],$ y además $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\int_{-b}^{-a} g(x)\,dx.$

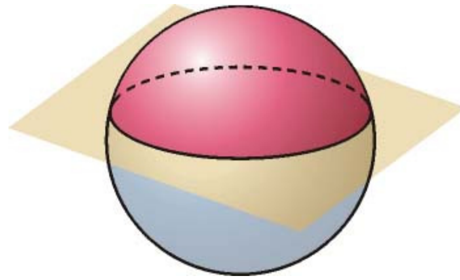
P3. Considere una esfera de radio $R>0$ y un cono de altura h y base circular de radio $r,$ circunscrito a la esfera. Calcule el volumen de la región dentro del cono, que está afuera de la esfera.



P4. Una esfera de radio R se perfora mediante un cilindro cuyo eje coincide con un diámetro de la esfera (ver figura). Se pide determinar el radio a que debe tener el cilindro para que se mantenga la mitad del volumen de la esfera, después de la perforación (Use que $V_{esfera}=\frac{4}{3}\pi R^3$).



P5. Una esfera de radio R se corta por un plano formando un casquete esférico de altura h. Calcular el volumen de este sólido.



P6. Para las regiones definidas a continuación, se pide calcular el área de la región y los volúmenes de los Sólidos generandos al rotar la región respecto al eje OX y respecto al eje OY.

(a) Región $\mathcal{R}_1$, limitada por las curvas, $f(x)=mx$ y $g(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$, con $m\in(0,1)$, en el primer cuadrante.

(b) Región $\mathcal{R}_2$, limitada por las rectas $y=x$, $\quad y=ax$, $\quad y=1-ax \quad a\geq 1$.

(c) Región $\mathcal{R}_3$, limitada por las curvas, $xy=1$, $\quad xy=8$, $\quad y=x^2$, $\quad y=8x^2$, en el primer cuadrante.

P7. Calcule el valor de $J=\displaystyle\int_0^{2a} x\sqrt{a^2-(x-a)^2}\,dx+\int_{-a}^{a} x\sqrt{4a^2-x^2}\,dx.$

P8. Considere $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, derivable, impar y estrictamente creciente. Pruebe que $g(x)=\displaystyle\int_0^{x^2} f(t)dt$ tiene un mínimo global en 0, y es convexa en $\mathbb{R}$.

P9. (a) Calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1} i2^{i/n}$

(b) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} f(t)dt}{\int_0^{x} xf(t)dt}$, donde la función f es continua y estrictamente positiva.

P10. (a) Sea f una función continua y no negativa en $[a,b]$. Pruebe que si $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=0$, entonces $f(x)=0$.

(b) Pruebe que $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ se verifica la identidad: $\displaystyle\int_0^{\cos^2 x}\arccos\left(\sqrt{t}\right)dt+\int_0^{\sin^2 x}\arcsin\left(\sqrt{t}\right)dt=\frac{\pi}{4}.$

Hint : primero pruebe que $\displaystyle\int_0^{\cos^2 x}\arccos\left(\sqrt{t}\right)dt+\int_0^{\sin^2 x}\arcsin\left(\sqrt{t}\right)dt=c\in\mathbb{R}$ y para calcular el valor de la constante, evalúe la expresión en algún x conveniente e integre por partes.