U. DE CHILE
INGENIERIA

Escuela de Ingeniería. FCFM-U. de Chile.
CALCULO MA–12A
Guía de Problemas No. 4, 2003

Integración

Índice

1. Problemas

[1] **Test de conocimiento básico.** Determinar la veracidad de las siguientes afirmaciones, justificando claramente su respuesta.

- Una partición $P = \{t_0, ..., t_n\}$ se dice equiespaceada o uniforme si $t_i = a + i\frac{(b-a)}{2n}$.
- Dada una función acotada y una partición P, la suma inferior $s(f,P)$ está dada por $\sum_{i=0}^{n-1} m_i(f)(t_{i+1} - t_i)$ donde $m_i(f) = \min\{f(x) : x \in [t_i, t_{i+1}]\}$.
- Para toda función f acotada y para toda partición P se cumple que $S(f,P) \geq s(f,P)$.
- Para toda función f acotada y para todo par de particiones P y T se cumple que $S(f,P) \geq s(f,T)$.
- Una función acotada es integrable si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe una partición $P \in \mathcal{P}_{a,b}$ tal que $s(f,P) - S(f,P) > -\epsilon$.
- Toda función creciente es integrable y toda función continua es integrable.
- Toda función integrable en $[a,b]$ y para todo $c \in (a,b)$ se cumple que $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f - \int\limits_c^b f$.
- Para todo par de funciones integrables en $[a,b]$ su suma y su producto son integrables en $[a,b]$.
- Para toda función continua definida en $[a,b]$ existe un $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f$.
- Para toda función integrable en $[a,b]$ la función $F(x)$ definida por $F(x) = \int\limits_0^x f$ es derivable.
- El volumen del sólido engendrado al rotar la región $R = \{(x,y) :\ a \leq x \leq b\ 0 \leq y \leq f(x)\}$, con f continua, en torno al eje OX está dado por $V = \pi\int\limits_a^b f$.
- El largo de $C = \{(x, f(x)) :\ a \leq x \leq b\}$ para una función con derivada continua está dado por $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2}$

[2] Calcule las siguientes primitivas:

$\int \cos(x)$ $\quad \int \operatorname{sen}(x)$ $\quad \int x^{\alpha}$ $\quad \int \frac{1}{x}$ $\quad \int \operatorname{sen}(ax)$ $\quad \int \cos(ax)$ $\quad \int e^{ax}$

$\int \cosh(x)$ $\quad \int \operatorname{senh}(x)$ $\quad \int (ax)^{\alpha}$ $\quad \int \frac{1}{ax}$ $\quad \int \operatorname{senh}(ax)$ $\quad \int \cosh(ax)$ $\quad \int \frac{1}{1+x^2}$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $\quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $\quad \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $\quad \int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$ $\quad \int \frac{1}{a^2-x^2}$ $\quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$

[3] Usando integración por partes calcule las siguientes primitivas

$\int x \operatorname{sen}(x)$ $\quad \int x \cos(x)$ $\quad \int x e^{x}$ $\quad \int x \operatorname{senh}(x)$ $\quad \int x \cosh(x)$ $\quad \int \frac{x}{1+x^2}$ $\quad \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

$\int x^2 \operatorname{sen}(x)$ $\quad \int x^2 \cos(x)$ $\quad \int x^2 e^{x}$ $\quad \int x^2 \operatorname{senh}(x)$ $\quad \int x^2 \cosh(x)$ $\quad \int \frac{x^2}{1+x^2}$ $\quad \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

[4] Establezca fórmulas de recurrencia para I_n dado por

$\int x^n \operatorname{sen}(x)$ $\quad \int x^n \cos(x)$ $\quad \int x^n e^{x}$ $\quad \int \operatorname{sen}^n(x)$ $\quad \int \cos^n(x)$

[5] Utilizando integración de funciones racionales calcule las siguientes primitivas

$\int \frac{1}{1+x}$ $\quad \int \frac{1}{x^2+2x+1}$ $\quad \int \frac{1}{1+x^2}$ $\quad \int \frac{1}{1-x^2}$ $\quad \int \frac{1}{(1+x^2)^2}$

[6] Aplique el cambio de variable $u = \tan(\frac{x}{2})$ para calcular las siguientes primitivas

$\int \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$ $\quad \int \frac{1}{\cos(x)}$ $\quad \int \frac{1}{1+\operatorname{sen}(x)}$ $\quad \int \frac{1}{1-\cos(x)}$ $\quad \int \frac{1}{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}$

[7] Aplicar un cambio de variable para calcular las siguientes primitivas.

$\int \frac{x+1}{x^2+x}$ $\quad \int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $\quad \int \frac{1}{x \ln(x)(\ln^2(x)+1)}$ $\quad \int \frac{c \tan(x)}{\ln(\operatorname{sen}(x))}$ $\quad \int \frac{\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{\sqrt{1+\operatorname{sen}(x)}}$

$\int e^{-\sqrt{x}}$ $\quad \int e^{x}\sqrt{1+e^{x}}$ $\quad \int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ $\quad \int \sqrt{x^2-a^2}$ $\quad \int \sqrt{x^2+a^2}$

[8] Aplicar integración por partes para calcular las siguientes primitivas.

$\int \operatorname{arc\,sen}(x)$ $\quad \int \ln(x)$ $\quad \int \arctan(x)$ $\quad \int x \operatorname{arc\,cos}(x)$ $\quad \int x \arctan(x)$

[9] Aplicar integración por partes para calcular las siguientes primitivas.

$\int \operatorname{sen}(ax)\operatorname{sen}(bx)$ $\quad \int e^{ax}\cos(bx)$ $\quad \int e^{ax}\operatorname{senh}(bx)$ $\quad \int \operatorname{sen}(ax)\cosh(bx)$ $\quad \int \cosh(ax)\cosh(bx)$

[10] Calcule la integral $\int_a^b (cx+d)$ usando una familia de particiones equiespaceadas.

[11] Calcule la integral $\int_a^b (e^x)$ usando una familia de particiones equiespaceadas.

[12] Considere la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$

1. Calcule $s(f,P)$ y $S(f,P)$.
2. Calcule $\inf_{P \in \mathcal{P}_{ab}} S(f,P)$.

[13] Considere la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q} \text{ fracción irreducible} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$

1. Calcule $s(f,P)$ y $S(f,P)$.

2. Calcule $\inf\limits_{P\in\mathcal{P}_{ab}} S(f,P)$ y $\sup\limits_{P\in\mathcal{P}_{ab}} s(f,P)$.

3. Concluya que f es integrable y que $\int\limits_0^1 f = 0$.

[14] Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que f es periódica de periodo p. Pruebe que $\int\limits_a^{a+p} f(x) = \int\limits_0^p f(x)$ para todo $a\in\mathbb{R}$.

[15] Hacer una aseveración general relativa a $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx$ para f una función impar y otra para f función par.

[16] Demuestre que si f es una función continua en $[a,b]$ y $\int\limits_a^b f(x) = 0$, entonces existe un c en $[a,b]$ tal que $f(c)=0$.

[17] Hallar $\int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b f(x)g(y)dy\right) dx$ en términos de $\int\limits_a^b f$ y $\int\limits_a^b g$.

[18] Hallar $F'(x)$ si $F(x) = \int\limits_0^x xf(t)dt$.

[19] Demostrar que si f es continua entonces $\int\limits_0^x f(u)(x-u)du = \int\limits_0^x \left(\int\limits_0^u f(t)dt\right) du$.

[20] Suponga que f es integrable en $[a,b]$. Demostrar que existe un número x en $[a,b]$ tal que $\int\limits_a^x f = \int\limits_x^b f$. Demostrar, con un ejemplo, que no siempre es posible elegir x que esté en (a,b).

[21] Calcule las derivadas de las siguientes funciones.

$$f(x) = \int\limits_1^{x^2} \operatorname{sen}(t^4)dt \quad f(x) = \int\limits_{\sqrt{x}}^{x^2} \tfrac{t^2}{1+t^6}dt \quad f(x) = \int\limits_{x^3}^{\cos(x)} (x-t)\operatorname{sen}(t^2)dt$$

[22] 1. Sea $f:[0,\infty[\to[0,\infty[$ una función biyectiva y derivable en $]0,\infty[$. Muestre que $g(x) = \int\limits_0^x f(t)dt + \int\limits_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt$, satisface que $g'(x) = f(x) + f'(x)x$. Concluya que $g(x) = xf(x)$.

2. Analice la siguiente función $g(x) = \int\limits_0^x (t-1)e^{-t^2}dt, \quad x\geq 0$, determinando dominio, continuidad, ceros, mínimos, máximos, asíntotas de todo tipo, recorrido, crecimiento, puntos de inflexión y gráfica.
nota: $\lim\limits_{x\to\infty} \int\limits_0^x e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

[23] 1. Calcular el área limitada por el bucle de la curva $y^2 = x^2(1-x)$ para $0\leq x\leq 1$.

2. Encuentre el área encerrada por $\rho = 2\cos(2\theta)$.

[24] Hallar el área entre las parábolas $y=\frac{x^2}{3}$ e $y = 4-\frac{2}{3}x^2$.

[25] Hallar el volumen del cuerpo formado por la rotación en torno de la recta $y=-1$, de la región acotada por $y = 4-x^2$ e $y=3$.

[26] Hallar el volumen generado al girar un arco de Cicloide en torno del eje OY.

[27] Hallar el volumen del sólido engendrado al rotar la superficie limitada por $y = e^x$, $x = 0$, $x = -2$ e $y = 0$ en torno al eje OX y en torno al eje OY.

[28] Hallar el volumen de rotación de la Astroide definida por la siguiente parametrización $x = a\cos^3(t)$ e $y = a\,\mathrm{sen}^3(t)$, en torno al eje OY.

[29]
1. Calcule la longitud de la curva $\rho = a(1 - \mathrm{sen}(\theta))$.
2. Calcule el área común entre la curva dada en la parte anterior y $\rho = a$

[30]
1. Calcule la longitud total de la curva $y = \frac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}}) - \frac{1}{2}(x^{\frac{1}{2}})$ entre $x = 1$ y $x = 4$.
2. Determine el volumen de un cono de revolución de altura a cuya base es de radio b.

[31] Calcule el área acotada por la parábola $y = x^2 - 2ax + a^2$, el eje OX, el eje OY y las rectas $x + y = a$, para $a > 1$.

[32] Calcule el área de la superficie cuando se gira la curva de ecuación $\rho^2 = a^2\cos(2\theta)$ en torno al eje OX.

[33]
1. Encuentre el valor del volumen del sólido de revolución obtenido de girar el área delimitada por el eje OX, el eje OY, la curva $-x^2 + 2$ y la recta $-\frac{x}{2} + 1$, en torno al eje OX.
2. Calcular el largo de la curva $c(t) = \begin{cases} e^{-bt} & 0 \leq t \leq 1 \\ e^{a(t-1)-b} & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$
3. Calcular la superficie de revolución obtenida al girar la curva $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a}}$ para $0 \leq x \leq \frac{a}{2}$.

[34] La función $y = \frac{\ln(x)}{x}$ tiene un máximo absoluto en x_0 y un punto de inflexión en x_1. Determinar estos puntos y calcular el área encerrada por la curva, el eje OX y las rectas $x = x_0$ y $x = x_1$. Además, determinar el volumen engendrado por la rotación del área anterior en torno al eje OY.

[35] Calcular el área encerrada por las curvas, dadas en coordenadas polares, $\rho = a$ y $\rho = a(1 + \cos(\theta))$ (donde (ρ, θ) son las coordenadas).

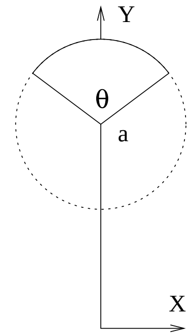
[36] Dada la curva $(\frac{x}{a})^{\frac{2}{3}} + (\frac{y}{b})^{\frac{2}{3}} = 1$ calcular

1. Longitud del arco en el primer cuadrante.
2. Volumen de revolución de esta cuerda.

[37] Determinar el centro de masa de la región encerrada entre las curvas $x^2 + y^2 = a^2$ y $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

2. Preguntas de controles de años anteriores

[1] El sector circular $A(\theta)$ de una circunferencia de radio r y centro $(0, a)$, se hace rotar en torno al eje OX generando un volumen $V(\theta)$.



1. Calcule $V(\theta)$ para $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
2. Probar que los ángulos para los cuales $V(\theta)$ es igual a la mitad del volumen del toro ($V_{toro} = 2\pi^2 r^2 a$) son las soluciones de la ecuación $\theta = f(\theta)$ donde $f(\theta) = \frac{\pi}{2} - \frac{2r}{3a}\operatorname{sen}(\theta)$.
3. Probar que $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to [0, \frac{\pi}{2}]$ es contractante y deducir la existencia de un único θ solución de la ecuación $f(\theta) = \theta$, que es además el límite de la sucesión $\theta_0 = 0$, $\theta_{n+1} = f(\theta_n)$

[2] Considere la curva cuyos puntos (x, y) satisfacen $(1 + x^2)y^2 = x^2(1 - x^2)$.

1. Calcule el área encerrada por esta curva.
2. Calcule el volumen de revolución generado por la rotación de esta curva en torno al eje $0X$.

[3] 1. Calcular el volumen del sólido generado por la rotación, en torno del eje OY, de la región limitada por la curva $y = x^{\frac{2}{3}}$, su tangente en el punto $x = 1$ y el propio eje OY.

2. Calcular el perímetro del lazo que forma la curva $9ay^2 = x(x - 3a)^2$.

[4] 1. Determinar las coordenadas del centro de gravedad del primer cuadrante de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

2. Aplicar ese resultado para calcular el centro de gravedad de la región limitada por el eje OY, una circunferencia de radio a y centro el origen y la elipse de la parte a).

[5] 1. Sea $I_n = \int \frac{\cos(nx)}{(\cos(x))^n} dx$

   a) Calcular I_1, I_2.

   b) Calcular $\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{(\cos(x))^{n+1}} dx$.

   c) Encontrar una relación de recurrencia para expresar I_{n+1} en función de I_n.

2. Calcular la primitiva $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx$.

[6] Considere la sucesión $a_n = \int_0^n q^x dx$, con $0 < q < 1$.

1. Explique porque (a_n) está bien definida, es decir, porque q^x es Riemann integrable en $[0, n]$, y muestre que es estrictamente creciente.
2. Calcule las sumas de Riemann inferior y superior para q^x y la partición $P = \{0, 1, ..., n\}$.
3. Utilice las sumas anteriores para obtener las siguientes cotas para (a_n).

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad q\frac{1 - q^n}{1 - q} < \int_0^n q^x dx < \frac{1}{1 - q}.$$

4. Concluya que (a_n) converge y que $a = \lim a_n$ satisface

$$\frac{q}{1 - q} \leq a \leq \frac{1}{1 - q}.$$

[7] 1. Calcular el área encerrada por la curva $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$, el eje OX y la recta $x = x_0$, donde x_0 hace máxima la función.

2. Calcule el volumen obtenido de rotar el área de la parte a, en torno al eje OY.

3. Calcular el largo de la curva $f(x) = 3 + x^{\frac{2}{3}}$ al variar x en el intervalo $[1, 8]$.

[8] 1. Sea $I_n = \int\limits_0^{\pi} x^n \operatorname{sen}(x)dx$. Muestre que $\forall n \geq 2$, $I_n = \pi^n - n(n-1)I_{n-2}$

2. Calcule la integral $\int\limits_0^{\pi^2} x^9 \operatorname{sen}(x^2)dx$

3. Calcule el volumen de un sólido de revolución, engendrado al girar el trozo de curva $y(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}$, $x \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, en torno al eje OX.

[9] 1. Bosqueje la curva de ecuación $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, justificando debidamente (en particular indique dominios, intersección con los ejes, crecimientos y concavidades).

2. Calcule el área de la región R encerrada entre las curvas $C_1 : \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ y $C_2 : x + y = a$.

3. Calcule el volumen del sólido de revolución generado por la rotación de la región R (de la parte b) en torno al eje OX.

[10] 1. Derive las siguientes funciones: $\ln(1 + \frac{\operatorname{sen}(x)}{x})$ y $x^{\arctan(e^x)}$.

2. Determine la continuidad de la función $[\frac{1}{1+x^2}]$.

3. Calcule los siguientes límites: $\lim\limits_{x \to 0}(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen}(x)})$ y $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\int_0^{x^3} e^{t^2} dt}{\int\limits_0^x \operatorname{sen}(t^2)dt}$.

4. Calcule la integral $\int\limits_0^1 x \arctan(x)dx$.

[11] 1. Calcule el valor de las siguientes integrales

   a) $I = \int\limits_{-3}^{3} |2 + x|dx$.

   b) $I = \int\limits_{-2}^{0} \frac{3x^2}{x^2-2x+1}dx$.

2. Demuestre que $I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}dx$ satisface la recurrencia:

$$(1 + 2n)I_n = (2x^n\sqrt{1+x}) - 2nI_{n-1}.$$

[12] 1. Determine el área del manto del sólido engendrado al rotar, en torno al eje OY, el trozo de la curva $y = \frac{x^2}{2}$, comprendido entre 0 y 1.

2. a) Encuentre el largo L de la curva obtenida al variar el parámetro t, desde 0 hasta 2π.

   b) Encuentre t_0 tal que, la longitud de la curva, obtenida al variar el parámetro t, desde 0 a t_0, sea igual a la mitad del largo L, obtenido en la parte i).

[13] 1. Considere la función $g(x)$ definida por $g(x) = \int\limits_0^x \frac{\arctan(t)}{t}$, donde $\frac{\arctan(t)}{t}$ se define en cero por continuidad.

   a) Demuestre que: $\int\limits_0^1 g(x)dx = g(1) - \int\limits_0^1 \arctan(t)dt$

b) Utilizando lo anterior, muestre que : $\int\limits_0^1 g(x)dx = g(1) - \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}$.

2. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función biyectiva, diferenciable y tal que $g(0) = 0$. Sea $f : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ una función diferenciable. Suponga que f y g satisfacen:

$$g(x) = \int\limits_0^{g(x)} f^2(g^{-1}(x))dx + f(x).$$

a) Pruebe que $f(x) = \tanh(g(x))$.

b) Calcule la integral $\int\limits_0^{x^3} (\tanh(t))^2 dt$ Ind: Observe que $f(g^{-1}(x)) = \tanh(x)$.

[14] 1. Calcule $\int \frac{dx}{x(\ln(x)+\ln^2(x))}$.

2. Usando el cambio de variables $\tan(\frac{x}{2}) = u$ calcule $\int \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}dx$ (Ind: $\cos(x) = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan(\frac{x}{2})}$).

3. Sean $I = \int \cos(\ln(x))dx$ y $J = \int \text{sen}(\ln(x))dx$. Usando integración por partes, plantee un sistema lineal que permita calcular I y J. Calcule I y J.

[15] 1. Sea $a_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} [\ln(n+i) - \ln(n)]$.

a) Identifique a_n como una suma de Riemann, determinando la función y la partición involucradas.

b) Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ usando la integral apropiada.

2. Demuestre que

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt[4]{e}} + \frac{1}{e}) \leq \int\limits_0^1 e^{-x^2}dx \leq \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\sqrt[4]{e}}).$$

(Ind: Considere la partición $P = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$).

[16] 1. Sea $g(x) = \int\limits_x^{x+1} (x-t)f(t)dt$. Calcule g' y g''. Utilizando el Teorema del Valor Medio para f en $[x, x+1]$, pruebe que si f' es decreciente entonces $g'' \geq 0$ (g es convexa).

2. Sea f continua. Defina F y G por $F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$ y $G(x) = \int\limits_0^x f(t^2)dt$. Demuestre que $\int\limits_0^u G(x)dx = uG(u) - \frac{1}{2}F(u^2)$.

[17] Sea $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$ y la longitud de la curva $y = f(x)$ entre 0 y x es igual a $x^2 + 2x - f(x)$.

1. Determinar f.

2. Calcular el área bajo la curva $y = f(x)$ y su longitud entre $x = 0$ y $x = 1$.

[18] 1. Probar que para todo $x > 0$ se cumple $\int\limits_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}dt = \int\limits_x^1 \frac{1}{1+t^2}dt$

2. Sea $I_n = \int\limits_0^1 (1-x^2)^n$, demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ positivo se cumple $I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1}$ y concluir que $I_n = \frac{2\cdot4\cdot6\cdots2n}{3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)}$.
Ind: $(1-x^2)^n = (1-x^2)^{n-1} - x^2(1-x^2)^{n-1}$.

[19] 1. Calcular el área de la región común a los círculos de ecuaciones $x^2+y^2=r^2$ y $x^2+y^2-2ry=0$.

2. Calcular el volumen del sólido de revolución obtenido girando el área de la parte a en torno al eje OX.

[20] Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada e integrable, verificando que $f((a+b)-x)=f(x)$ para todo $x\in[a,b]$.

1. Probar que $\int\limits_a^b xf(x)=\frac{a+b}{2}\int\limits_a^b f(x)$

2. Sea ahora $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$ continua. Pruebe que $\int\limits_0^\pi xg(\operatorname{sen}(x))=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^\pi g(\operatorname{sen}(x))$.

3. Deduzca que $\int\limits_0^\pi \frac{x\operatorname{sen}(x)}{1+\cos^2(x)}=\frac{\pi}{2}\int\limits_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}$ y calcule el valor de la integral.

[21] 1. Dada una función $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $F(x)=\int\limits_0^x(\operatorname{sen}(t^2)+1)$, encuentre la ecuación de la recta tangente al grafo de F en el punto $(0,F(0))$.

2. Dada una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivable y tal que $f(x)\neq 0$ para todo $x\neq 0$. Demuestre que si $[f(x)]^2=2\int\limits_0^x f(t)$ para todo $x\in\mathbb{R}$ entonces $f(x)=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

[22] 1. Calcular $F'(0)$ siendo $F(x)==\begin{cases}\frac{g(x)}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$, sabiendo que $g(0)=g'(0)=0$ y que $g''(0)=12$.

2. Calcular $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\frac{e}{4\pi}(4x^2-\pi^2)+\int\limits_x^{\frac{\pi}{2}} e^{\operatorname{sen}(t)}}{1+\cos(2x)}$.

[23] 1. Determinar el área del manto sólido engendrado al rotar, en torno al eje OY, el trozo de la curva $y=\frac{x^2}{2}$, comprendido entre 0 y 1.

2. Considere la espiral de ecuación paramétrica $x(t)=e^{2t}\cos(t)$, $y(t)=e^{2t}\operatorname{sen}(t)$.
   - *a*) Encuentre el largo L, de la curva obtenida al variar el parámetro t, desde 0 hata 2π.
   - *b*) Encuentre t_0 tal que, la longitud de la curva obtenida al variar el parámetro t, desde 0 a t_0 sea igual a la mitad del largo L, obtenido en la parte anterior.

[24] Por un punto $P=(x_0,y_0)$ cualquiera del primer cuadrante de la astroide $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(a>0)$ se traza la recta tangente la cual intercepta a los ejes coordenados en los puntos A y B. Determine la posición del punto P para que el volumen del sólido de revolución, generado por la rotación del triángulo OAB en torno al eje OY, sea máximo y calcule su valor.

[25] Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x\cos(x)-\operatorname{sen}(x)$. Se pide:

1. Desarrollar f mediante un polinomio de Taylor de quinto grado en torno a $x_0=0$ y escribir la fórmula integral para el resto.

2. Acotar el error cometido al aproximar la función $f(x)$ por el polinomio encontrado en la parte anterior si $|x|<\frac{1}{5}$.

[26] 1. Calcule $\int\frac{5x^2+12x+1}{x^3+3x^2-4}$.

2. Deducir una fórmula de recurrencia para $I_{m,n,}=\int x^m(\ln(x))^n$. Use la fórmula para calcular $\int x^2\ln x$.

[27] Calcular

1. $\int\limits_0^1 \operatorname{arc\,cos}\left(\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right)$
2. $\int \frac{4t^3+7t^2+6t+4}{(t+1)^2(1_t^2)}$

[28] Dadas las elipses de ecuaciones $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ y $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ se pide:

1. Calcular el área de intersección de ambas elipses.
2. Encontrar el volumen del sólido generado al rotar el área de la parte anterior en torno a uno de los ejes.

[29] Sea $f:[1,\infty[\to\mathbb{R}$ una función no negativa y decreciente. Se definen las sucesiones: $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$, $T_n=\int\limits_1^n f(t)$ y $\Delta_n=S_n-T_n$.

1. Pruebe que $f(n+1)\leq\Delta_{n+1}\leq\Delta_n\leq f(1)$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Deduzca que Δ_n converge.
2. Demuestre usando la parte anterior que la sucesión:
$u_n=\frac{1}{2\ln(2)}+\frac{1}{3\ln(3)}+\cdots+\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}-\ln(\frac{\ln(n+1)}{\ln(2)})$ converge.

[30] Un vaso de forma troncocónica de radios basales R y $r=\frac{R}{2}$ y de altura H, se encuentra originalmente lleno de agua. Si el vaso gira en torno al eje principal, pierde parte de su contenido y la superficie libre del líquido adopta la forma de un paraboloide de revolución

1. Calcule, usando integración, el volumen de agua original.
2. Para el vaso girando, calcule la distancia c del vértice del paraboloide al fondo del vaso para que se mantenga en rotación la mitad del contenido original de agua.
3. Para el caso particular $R=7cms.$ y $H=6\sqrt{3}$ cms.calule el área de la superficie líquida libre generada según las condiciones descritas en la pate anterior.
Ind: Superficie de revolución $=2\pi\int\limits_a^b x\sqrt{1+(f')^2}$.

[31] Sea f una función derivable en $[a,b]$ y tal que para todo $x\in[a,b]$, se cumple que $|f'(x)|\leq K$

1. Use el teorema del valor medio para deducir que para toda particion P de $[a,b]$, $S(f,P)-s(f,P)\leq K|P|(b-a)$.
2. Demuestre, a partir de a), que la función f es integrable en $[a,b]$.
3. Verifique que para toda partición P de $[a,b]$ se cumple que $\left|\int\limits_a^b f-\frac{1}{2}(S(f,P)+s(f,P))\right|\leq\frac{1}{2}K|P|(b-a)$.

3. Pauta Control #4 MA12A Cálculo, Año 2002

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es *responsabilidad del alumno* tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba. Esta se puede obtener vía `http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA12A.html` en formato ps o pdf.

P1.-

(i) Sea $f(x) := \int_1^x x\ \ln(tx)\,dt$, definida en $(0,+\infty)$.

(a) (2 ptos.) Encuentre $\int \ln(t)$ y calcule $f(2)$.

(b) (2 ptos.) Demuestre que $f'(x) = (4x-1)\ln(x) \quad \forall x \in (0,+\infty)$.

(ii) (2 ptos.) Asumiendo que la función $g(t) = \operatorname{arc\,sen}(\arctan(t))$ es continua en $[0,\tan(1)]$, encuentre la derivada de la función $f(x) = \int_0^{\tan(x)} \operatorname{arc\,sen}(\arctan(t))\,dt$ para $x \in [0,1]$.

Pauta.-

(i) **(a)** La primitiva $\int \ln(x)\,dx$ se puede calcular usando integración por partes con $f'(t) = 1$, $g = \ln(t)$ y entonces $f(t) = t$ y $g'(t) = \frac{1}{t}$. Con esto

$$\int \ln(t) = t\ \ln(t) - \int \frac{t}{t} = t\ \ln(t) - t + C.$$

También es lícito hacer el cambio de variable $t = e^u$ y $t' = e^u$ y obtener

$$\int \ln(t) = \int u\,e^u,$$

que integrada por partes con $f(u) = u$ y $g'(u) = e^u$ queda

$$\int u\,e^u = u\,e^u - e^u + C,$$

que escrita en la variable original nos da

$$\int \ln(t) = t\ \ln(t) - t + C.$$

Cálculo de $f(2) = \int_1^2 2\ \ln(2t)\,dt$. Como $\ln(2t) = \ln(2) + \ln(t)$ tenemos que

$$\begin{aligned} f(2) &= 2(\ln(2) + (t\ln(t) - t)|_1^2) \\ &= 2(\ln(2) + 2\ln(2) - 2 - (\ln(1) - 1)) \\ &= 2(3\ln(2) - 1) \end{aligned}$$

Pauta: [**1pto**] aplicación de la o las técnicas de integración. [**0.25pto**] integrales conocidas: constantes o e^u. [**0.25pto**] familia de primitivas bien descrita, o sea, en la solución aparece la constante genérica de integración. [**0.25pto**] cálculo de la primitiva de $\ln(2t)$: aplicación del TFC, luego separar $\ln(2t)$ o hacer el cambio de variables $t = u/2$. [**0.25pto**] manejo algebraico.

(b) Desarrollando $\ln(tx) = \ln(t) + \ln(x)$ se obtiene

$$f(x) = x(x-1)\,\ln(x) + x\int_1^x \ln(t)\,dt,$$

en este punto podemos primero calcular $\displaystyle\int_1^x \ln(t)dt$ y luego derivar o viceversa. Procediendo de la segunda forma obtenemos

$$f'(x) = (x-1)\ln(x) + (x-1) + x\ln(x) + \int_1^x \ln(t)\,dt + x\ln(x).$$

Usando $\int_1^x \ln(x)\,dt = x\,\ln(x) - x + 1$ concluir que

$$f'(x) = 3x\,\ln(x) + x - 1 - \ln(x) + x\,\ln(x) - x + 1 = (4x-1)\,\ln(x).$$

Pauta: [**0.5pto**] uso del TFC, mención que ln es continua en $(0,+\infty)$ y derivada de $\int_1^x \ln(t)$. [**0.5pto**] Uso del TFC: $\int_1^x \ln(t) = x\ln(x) - x + 1$ ya evaluado, pero aquí tiene el interés que se diferencia la variable de integración de la variable x. [**0.5pto**] cálculo correcto de derivadas. [**0.5pto**] manejo algebraico.

(ii) Sea $G(u) = \displaystyle\int_0^u \operatorname{arc\,sen}(\arctan(t))\,dt = \int_0^u g(t)\,dt$. Como estamos asumiendo que $g(t)$ es continua en $[0,\tan(1)]$, el TFC nos asegura que la función G es derivable en el intervalo $(0,\tan(1))$ y que $G'(u) = \operatorname{arc\,sen}(\arctan(u))$. Ahora $f(x) = G(\tan(x))$ con lo que la derivada de f es la derivada de una composición de funciones. Así

$$f'(x) = G'(\tan(x))\tan'(x) = \operatorname{arc\,sen}(\arctan(x))\sec^2(x) = \operatorname{arc\,sen}(x)\sec^2(x).$$

Pauta: [**0.5pto**] verificación de hipótesis del TFC: mención que $g(t) = \operatorname{arc\,sen}(\arctan(t))$ debe ser continua en el intervalo indicado para que G sea derivable. [**1pto**] Uso del TFC: $G'(u) = \operatorname{arc\,sen}(\arctan(u))$. [**0.5pto**] Uso de la regla de la cadena y derivada de la función tangente.

P2.-

(i) Sea $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$. Si

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le f(x)\right\}.$$

(a) (2 ptos.) Encuentre el área de la región R.

(b) (2 ptos.) Encuentre el volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar la región R en torno al eje OX.

(ii) (2 ptos.) Dada la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1,$$

encuentre el área del manto generado al rotar esta elipse en torno al eje OX entre $x=-1$ y $x=1$.

Pauta.- **(i)** **(a)** El área buscada es el valor de la integral

$$A(R) = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Para calcular esta integral hacemos el cambio de variable $u = 1-x^2$ con el cual $du = -2x\,dx$, $u(0)=1$ y $u(1)=0$. Así, el área buscada es

$$A(R) = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{u}\,du = \frac{1}{3}\,u^{\frac{3}{2}}\big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

[**2ptos**]

(b) El volumen buscado está dado por la fórmula

$$V = \pi \int_0^1 f^2(x)\,dx = \pi \int_0^1 x^2(1-x^2)\,dx.$$

Como el integrando es la función polinomial $x^2 - x^4$, el valor de la integral es

$$\int_0^1 (x^2 - x^4)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{2}{15}.$$

Así, el volumen buscado es

$$V = \frac{2\pi}{15}.$$

[2ptos]

(ii) La intersección de la elipse con el eje OX son los puntos $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen $x^2 = 2$, es decir $x = \sqrt{2}$ y $x = -\sqrt{2}$. Luego, para $x \in [-1,1]$, la ecuación de la elipse define en el eje OY positivo la función

$$f(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2 - x^2}, \quad x \in [0,1].$$

Por lo tanto, usando simetría o la paridad de f, el área buscada está dada por la fórmula

$$A = 2\pi \int_{-1}^1 f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx = 4\pi \int_0^1 f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Como

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{-x}{\sqrt{2 - x^2}}$$

se tiene que

$$f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$$

y así

$$A = 2\pi \int_0^1 \sqrt{4 - x^2}\,dx.$$

Para calcular esta integral usamos la sustitución trigonométrica $x = 2\sin(\theta)$, con la cual $dx = 2\cos(\theta)\,d\theta$, $\sqrt{4 - x^2} = 2\cos(\theta)$, $\theta(0) = 0$ y $\theta(1) = \operatorname{arc\,sen}(1/2) = \pi/6$. Luego, el área buscada es

$$\begin{aligned}
A &= 2\pi \int_0^{pi/6} 4\cos^2(\theta)\,d\theta \\
&= 2\pi \int_0^{pi/6} (2 + 2\cos(2\theta))\,d\theta \\
&= 2\pi(2\theta + \sin(2\theta))\big|_0^{\pi/6} \\
&= 2\pi(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2})
\end{aligned}$$

[2ptos]

P3.- **(i)** (3 ptos.) Calcule $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx.$

(ii) Sea f una función infinitamente derivable en $\mathbb{R}$. Sea $I_n = \displaystyle\int e^{-x} f^{(n)}(x)\,dx$, donde $f^{(n)}$ denota la $n-$ésima derivada de f.

(a) (1.5 ptos.) Demuestre que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$I_n = I_{n+1} - e^{-x} f^{(n)}(x).$$

(b) (1.5 ptos.) Si $f^{(k)} = 0$ para un cierto $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, demostrar que $\forall x \in \mathbb{R}$

$$I_0 = \int e^{-x} f(x)\, dx = -e^{-x} \sum_{i=0}^{k-1} f^{(i)}(x) \; + \; C,$$

siendo C una constante real.

Pauta.- **(i)** Usando fracciones parciales

$$\begin{aligned}
\frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)} &= \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}\right) \\
&= \frac{A(x+1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x+1)^2}{(x+1)^2(x^2+1)} \\
&= \frac{(A+C)x^3 + (A+B+D+2C)x^2 + (A+C+2D)x + A+B+D}{(x+1)^2(x^2+1)}
\end{aligned}$$

[**0.5pto**]
Comparando coeficientes se obtiene el sistema lineal

$$\begin{aligned}
A+C &= 0 \\
A+B+D+2C &= 3 \\
A+C+2D &= 2 \\
A+B+D &= 1
\end{aligned}$$

de donde

$$A = -1, \quad B = C = D = 1.$$

[**0.5pto**]
Reemplazando se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)} &= -\int_0^1 \frac{1}{x+1}\, dx + \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\, dx + \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1}\, dx \\
&= \left(-\ln(x+1) - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan(x)\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} \\
&= -\ln(2) - \frac{1}{2} + \frac{\ln(2)}{2} + \arctan(1) + \ln(1) + \frac{1}{1} - \frac{\ln(1)}{2} - \arctan(0) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

[**1.5pto**] por primitivas, [**0.5pto**] por evaluación.

(ii) **(a)** Usando integración por partes (integramos e^{-x} y derivamos $f^{(n)}$) se obtiene

$$\begin{aligned}
I_n &= \int e^{-x} f^{(n)} = -\int -e^{-x} f(n+1) - e^{-x} f^{(n)} \\
&= I_{n+1} - e^{-x} f^{(n)}
\end{aligned}$$

[**1.5pto**]

(b) Aplicamos de manera recurrente la fórmula de la parte anterior para obtener

$$\begin{aligned} I_0 &= I_1 - e^{-x}f' \\ &= I_2 - e^{-x}f' - e^{-x}f'' \\ &\vdots \\ &= I_{k-1} - e^{-x}f' - e^{-x}f'' - \ldots - e^{-x}f^{(k-1)} \\ &= I_k - e^{-x}f' - e^{-x}f'' - \ldots - e^{-x}f^{(k-1)} - e^{-x}f^{(k)} \end{aligned}$$

pero $f^{(k)} = 0$ implica que $I_k = 0$ (salvo constante) de donde se obtiene el resultado pedido. **[1.5pto]**
También se puede razonar más rigurosamente por inducción sobre k, pero esto tiene el mismo puntaje.

4. Problemas resueltos

P1.- Calcule las siguientes primitivas

a) $\int \frac{1}{x^2+2x-3}$ b) $\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}}dx$

c) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$ d) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2+(\sqrt{1+x^2})^3}}dx$

Solución:

a) $\int \frac{1}{x^2+2x-3}$ notando que $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$ luego

$$\frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x-1)}$$

Donde $A = -\frac{1}{4}$ y $B = \frac{1}{4}$ luego

$$\int \frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{4}\left(-\int \frac{1}{(x+3)} + \int \frac{1}{(x-1)}\right) = \frac{1}{4}(-\ln(x+3)+\ln(x-1)) + C$$

b) $I = \int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}}dx$ Haciendo $u = \operatorname{sen} x \Rightarrow du = \cos x\, dx$ con esto $I = \int \frac{u}{\sqrt{1+u}}du$ ahora notando que

$$\frac{u}{\sqrt{1+u}} = \frac{u+1}{\sqrt{1+u}} - \frac{1}{\sqrt{1+u}} = \sqrt{1+u} - \frac{1}{\sqrt{1+u}}$$

luego $I = \int \sqrt{1+u} - \int \frac{1}{\sqrt{1+u}} = \frac{2}{3}(1+u)^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{1+u} + C$ retornando a la variable original

$$\frac{2}{3}(1+\operatorname{sen} x)^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{1+\operatorname{sen} x} + C$$

c) $I = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$ Haciendo $u^2 = x$ y por lo tanto $2udu = dx$ con esto $I = \int \frac{u^2}{\sqrt{1+u}}du$, ahora notando que

$$\begin{aligned}
\frac{u^2}{\sqrt{1+u}} &= \frac{u^2-1}{\sqrt{1+u}} + \frac{1}{\sqrt{1+u}} = \frac{(u+1)(u-1)}{\sqrt{1+u}} + \frac{1}{\sqrt{1+u}} \\
&= \sqrt{1+u}(u-1) + \frac{1}{\sqrt{1+u}} \\
&= u\sqrt{1+u} - \sqrt{1+u} + \frac{1}{\sqrt{1+u}}
\end{aligned}$$

integrando cada término por separado se obtiene el resultado.

d) Realicemos el cambio de variable $u^2 = 1+x^2$ con esto $2udu = 2xdx$ reemplazando se obtiene: $I = \int \frac{u}{\sqrt{u^2+u^3}}du = \int \frac{1}{\sqrt{1+u}}du$, ahora haciendo $s = 1+u$ se tiene que $ds = du$: $I = \int s^{-\frac{1}{2}}ds = 2s^{\frac{1}{2}}$ retornando a las variables originales:

$$I = 2(1+u)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$$

P2.- *a)* Para $J_n = \int \frac{x^n}{1+x^2}dx$ demuestre que $J_{n+1} + J_{n-1} = \frac{x^n}{n}$.

b) usando (a) deducir una relación de recurrencia para $I_n = \int x^n \arctan(x)dx$.

Solución:

a)

$$J_{n+1} + J_{n-1} = \int \frac{x^{n+1}}{1+x^2} + \frac{x^{n-1}}{1+x^2}dx$$

factorizando por x^{n-1}:

$$J_{n+1} + J_{n-1} = \int x^{n-1}dx = \frac{x^n}{n}$$

b) Integrando por partes, tomando $u = \arctan(x)$ y $v = x^n$:

$$I_n = x^n \arctan x - \frac{1}{n+1}\int \frac{x^{n+1}}{1+x^2}dx$$

analogamente se tiene para I_{n-2}:

$$I_{n-2} = x^{n-2} \arctan x - \frac{1}{n-1}\int \frac{x^{n-1}}{1+x^2}dx$$

con esto:

$$nI_n + (n-1)I_{n-2} = (x^2+1)x^{n-2}\arctan x - (J_{n+1} + J_{n-1})$$

utilizando la parte (a) se concluye.

P3.- Dada la partición $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots x_n\}$ del intervalo $[1, e]$ con $x_k = e^{\frac{k}{n}}$ y la función $f(x) = \ln(x)$. Calcular:

a) $S(f, \mathcal{P})$ y $s(f, \mathcal{P})$.

$$\text{Ind: } \sum_{k=1}^{n} ka^k = \frac{1}{1-a}\left\{1 - (n+1)a^n + \frac{a(1-a^n)}{1-a}\right\}$$

b) Usando 1. concluya que f es integrable en $[1, e]$ y calcule $\int\limits_1^e \ln(x)dx$.

Solución:

a) Sea $f(x) = \ln(x)$ usando la partición $\mathcal{P} = \{1, e^{\frac{1}{n}}, \ldots, e\}$ se obtiene

$$x_k = e^{\frac{k}{n}} \quad k = 0, \ldots, n \quad \Delta x_k = e^{\frac{k}{n}} - e^{\frac{k-1}{n}} = e^{\frac{k-1}{n}}\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)$$

$$\begin{aligned} M_i = \sup\{f(x) | x \in [x_{k-1}, x_k]\} &= \ln(x_k) = \frac{k}{n} \\ m_i = \inf\{f(x) | x \in [x_{k-1}, x_k]\} &= \ln(x_{k-1}) = \frac{k-1}{n} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} s(f, \mathcal{P}) &= \left(\frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}(k-1)e^{\frac{k-1}{n}} \\ S(f, \mathcal{P}) &= \left(\frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} ke^{\frac{k}{n}} \end{aligned}$$

Calculemos $S(f, \mathcal{P})$ utilizando la indicación (con $a = e^{\frac{1}{n}}$) se obtiene

$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{P}) &= -\frac{1}{n}\left\{1 - (n+1)e + \frac{e^{\frac{1}{n}}(1-e)}{1 - e^{\frac{1}{n}}}\right\} \\ &= -\left(\frac{1}{n} - \frac{(n+1)}{n}e - \frac{e^{\frac{1}{n}}(1-e)}{n(e^{\frac{1}{n}} - 1)}\right) \end{aligned}$$

b) Notando que $n(e^{\frac{1}{n}}-1)\to 1$ tomando $\lim\limits_{n\to\infty} S(f,\mathcal{P})$ se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty} S(f,\mathcal{P})=1$$

analogamente se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} s(f,\mathcal{P})=1$$

llamando $\mathcal{P}_n=\{1,e^{\frac{1}{n}},\ldots,e\}$, entonces dado $\varepsilon\geq 0$ se tiene que $\exists\, n_1\in\mathbb{N}$ tq.

$$|S(f,\mathcal{P}_{n_1})-1|\leq\frac{\varepsilon}{2}$$

analogamente $\exists\, n_2\in\mathbb{N}$ tq

$$|s(f,\mathcal{P}_{n_2})-1|\leq\frac{\varepsilon}{2}$$

para $n\geq\max\{n_1,n_2\}$ se tiene que

$$|S(f,\mathcal{P}_n)-s(f,\mathcal{P}_n)|\leq|S(f,\mathcal{P}_{n_1})-1|+|s(f,\mathcal{P}_{n_2})-1|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

luego f es Riemann integrable y por lo tanto

$$\int_1^e \ln(x)dx=1$$

(Notemos que si usámos el hecho que f es continua el resultado es directo).

P4.- Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\left(\pi\frac{k}{n}\right)^2\right)}$$

Ind: Considere una suma de *Riemann* en el intervalo $[0,\pi]$.

Solución:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\left(\pi\frac{k}{n}\right)^2\right)} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\left(\pi\frac{k}{n}\right)^2\right)\\ &= \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\left(\pi\frac{k}{n}\right)^2\right)\end{aligned}$$

Esta es una suma de Riemann para una partición equiespaciada de la función $\ln(1+x^2)$ la cual es continua en $[0,\pi]$ luego integrable entonces la suma converge

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\left(\pi\frac{k}{n}\right)^2\right)\frac{\pi-0}{n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ln(1+x^2)dx$$

Una primitiva de $\ln(1+x^2)$ es $x\ln(1+x^2)-2x+2\arctan x+C$ luego por T.F.C se tiene

$$\int_0^{\pi}\ln(1+x^2)dx=\pi\ln(1+\pi^2)-2\pi+2\arctan\pi$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\left(\pi\frac{k}{n}\right)^2\right)\frac{\pi}{n}=\ln(1+\pi^2)-2+\frac{2}{\pi}\arctan\pi$$

P5.- Calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-e^{x^2}} \int_0^x e^{t^2}\,dt.$$

Solución:

Notemos que este límite es de la forma $\frac{0}{0}$ luego podemos aplicar la regla de *L'Hopital*, para derivar la integral utilizamos el Teorema Fundamental del Cálculo (T.F.C.)

$$\begin{aligned} L = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1-e^{x^2}} \int_0^x e^{t^2}\,dt &\overset{\text{L'hop}}{=} \lim_{x\to 0} -\frac{\int_0^x e^{t^2}\,dt + xe^{x^2}}{2xe^{x^2}} \\ &\overset{\text{L'hop}}{=} -\frac{2e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}{2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}} \\ &= -1 \end{aligned}$$

P6.- Una marraqueta es un sólido que tiene por base una elipse de semiejes a y b, y cada sección de este sólido corresponde a una circunferencia como se indica en la figura 1 Calcule el volumen de la

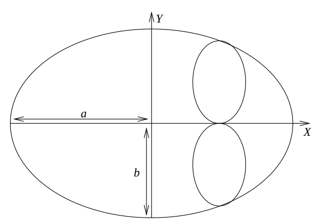


Figura 1: la marraqueta

marraqueta.

Solución Por simetría $V(marraqueta) = 4 \cdot V(R)$ donde R es la región definida por el primer cuadrante (figura 2). Calculemos $V(R)$

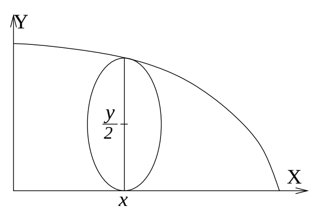


Figura 2: primer cuadrante

Dado $x \geq 0$ es tiene que el área de la circunferencia de centro $(x, y/2)$ y radio $y/2$ esta dado por $A(x) = \pi\left(\frac{y}{2}\right)^2$ y como $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ se cumple que $A(x) = \frac{\pi b^2(a^2-x^2)}{4a^2}$ y por lo tanto

$$V(R) = \int_0^a A(x)dx = \frac{\pi b^2}{4a^2}\int_0^a a^2 - x^2 dx.$$

A. (Apéndice) Tabla de primitivas elementales

- $\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
- $\int \frac{1}{x} = \ln|x| + C$
- $\int \operatorname{sen}(ax) = -\frac{1}{a}\cos(ax) + C$
- $\int \cos(ax) = \frac{1}{a}\operatorname{sen}(ax) + C$
- $\int \tan(ax) = -\frac{1}{a}\ln\cos(ax) + C$
- $\int \sec^2(ax) = \frac{1}{a}\tan(ax) + C$
- $\int \csc^2(ax) = -\frac{1}{a}\cot(ax) + C$
- $\int e^{ax} = ae^{ax} + C$
- $\int \operatorname{senh}(ax) = \frac{1}{a}\cosh(ax) + C$
- $\int \cosh(ax) = \frac{1}{a}\operatorname{senh}(ax) + C$
- $\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan(x) + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\operatorname{arc}\cos(x) + C$
- $\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan(x) + C$
- $\int \frac{1}{1-x^2} = \operatorname{arg}\tanh(x) + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arg}\cosh(x) + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arg}\operatorname{senh}(x) + C$
- $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} + C$