MA1002-6: Cálculo Diferencial e Integral.
Profesor: Daniel Remenik Z.
Auxiliar: Ítalo Riarte C.
Primavera 2012

Auxiliar 7: Integral de Riemann y TFC.

Condición de Riemann: Una función f acotada y definida en $[a,b]$, es Riemann Integrable en $[a,b]$ ssi:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \mathcal{P} \in \mathcal{P}_{[a,b]} : S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) < \varepsilon.$$

Primer TFC : Sea f continua en un intervalo $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ y $a \in \mathcal{I}$. entonces la función G, definida por:

$$G(x) = \int_a^x f,\ \text{es derivable en } \operatorname{int}(\mathcal{I}) \text{ y además } G' = f \text{ en } \operatorname{int}(\mathcal{I}).$$

Corolario : Si la función F es una primitiva de f, continua en $\mathcal{I} \Rightarrow \forall a,b \in \mathcal{I} : \int_a^b f = F(b) - F(a)$.

Segundo TFC : Sea f integrable en $[a,b]$. Si existe una función F, continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b)

tal que $F' = f$, en (a,b) entonces $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

P1. (a) Sea $I_n(x) = \int \sec^n(x)dx$. Pruebe que la siguiente fórmula de reducción es válida $\forall n \geq 2$:

$$I_n = \frac{\sec^{n-2}(x)\tan(x)}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}.$$

(b) Calcule I_0 e I_1.

(c) Usando apropiadamente las partes anteriores, calcule $\int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$ y $\int_a^{2a} x^2\sqrt{x^2-a^2}\, dx$.

P2. (a) Sean $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$, funciones tales que $f(x) = g(x)$, $\forall \in [a,b] \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, es decir, difieren en un número finito de puntos. Pruebe que si f es Riemann integrable, entonces g también lo es y además:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

(b) Sea $f(x) = \begin{cases} [2x] & \text{si } x \in [0,1] \\ [x] & \text{si } x \in (1,2] \end{cases}$.

(**b1**) Usando la partición $\mathcal{P} = \{0,1,2\}$, muestre que $S(f,\mathcal{P}) = 4$ y $s(f,\mathcal{P}) = 1$.

(**b2**) Usando las partes anteriores y una partición adecuada, pruebe que f es Riemann integrable en $[0,2]$.

P3. Sea $s_n = \dfrac{1}{n^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{n^2-k^2}$. Identifique s_n como una suma de Riemann y pruebe que:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

P4. Calcule los siguientes límites, usando el primer TFC y la regla de L'Hopital adecuadamente.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_{x^3}^{x^2}\operatorname{sen}(t^2)dt}{\displaystyle\int_0^{x^6} e^{t^2}dt}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\displaystyle\int_1^{x}(x-1)\operatorname{sen}(t^2)dt}{\displaystyle\int_1^{x^2}\operatorname{sen}(t^2-1)dt}$

P5. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ diferenciable tal que $\forall x\in[a,b]: \left|f'(x)\right|\leq\delta$.

(a) Demuestre que, para toda partición $\mathcal{P}$ en $[a,b]$: $\quad S(f,\mathcal{P})-s(f,\mathcal{P})\leq\delta\left|\mathcal{P}\right|(b-a)$

con $\left|\mathcal{P}\right| = \max\left\{x_i - x_{i-1} : i=0,1,\ldots,n\right\}$.

(b) Demuestre, usando la parte (a) que f es Riemann integrable en $[a,b]$.

(c) Concluya que $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{1}{2}\Big(S(f,\mathcal{P})+s(f,\mathcal{P})\Big)\right| \leq \frac{1}{2}\delta\left|\mathcal{P}\right|(b-a).$

Importante : Sea f una función integrable. Consideremos la partición equiespaciada en $[a,b]$,

$\mathcal{P}=\{x_0,x_2,\ldots,x_n\}$, donde: $x_0=a,\ x_1=a+\dfrac{b-a}{n},\ x_2=a+2\dfrac{b-a}{n},\ \ldots\ ,\ x_n=a+n\dfrac{b-a}{n}=b.$

Es decir, $x_k = a+\dfrac{b-a}{n}k$. Claramente $\triangle x_k = x_k - x_{k-1} = \dfrac{b-a}{n}$. Entonces la suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\triangle x_k \to \int_a^b f(x)dx,$$

es decir,: $$\sum_{k=1}^{n}\frac{b-a}{n}\cdot f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\to\int_a^b f(x)dx.$$

En particular, si $a=0$ y $b=1$:

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{k}{n}\right)$$