MA1002-6: Cálculo Diferencial e Integral.
Profesor: Daniel Remenik Z.
Auxiliar: Ítalo Riarte C.

Pauta Auxiliar 5.

P1. Sean $0 < a < b$ y las funciones $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b).

(a) Pruebe que $\exists \overline{x} \in [a,b]: \ f(\overline{x}) = \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

(b) Pruebe que si $\dfrac{f(a)}{a} = \dfrac{f(b)}{b}$, entonces $\exists \overline{x} \in (a,b): \ \overline{x} \cdot f'(\overline{x}) = f(\overline{x})$.

(c) Pruebe que si $f(a) = g(a)$ y $f(b) = g(b)$, entonces $\exists \overline{x} \in (a,b): \ f'(\overline{x}) = g'(\overline{x})$.

(d) Pruebe que si $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) \neq 0 \ \ \forall x \in (a,b)$, Entonces entre dos raices consecutivas de f, existe una y sólo una raíz de g.

Solución:

(a) Opción 1: Defina $h(x) = f(x) - \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$, evalúe $g(a)$ y $g(b)$ y concluya usando el TVI.

Opción 2: Claramente, $\text{mín}\left\{f(a), f(b)\right\} \leq \dfrac{f(a)+f(b)}{2} \leq \text{máx}\left\{f(a), f(b)\right\}$, por tanto es directo del TVI.

(b) Defina $h(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, usando el TVM (o Rolle) en $[a,b]$ y notando que $h'(x) = \dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$, se tiene:
$\exists \xi \in (a,b): \dfrac{h(b)-h(a)}{b-a} = h'(\xi)$, y claramente por hipótesis $h(b) = h(a) \Leftrightarrow h(b) - h(a) = 0$, por lo cual:

$$h'(\xi) = \frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2} = 0.$$

Ordenando se concluye.

(c) Definiendo $h(x) = f(x) - g(x)$, que cumple las hipotesis del TVM se tiene que:

$\exists \xi \in (a,b): \dfrac{h(b)-h(a)}{b-a} = h'(\xi)$, donde claramente por hipótesis $h(b) = h(a) = 0$, entonces:

$$h'(\xi) = f'(\xi) - g'(\xi) = 0.$$

Ordenando se concluye.

(d) Sean x_1 y x_2 dos raíces consecutivas de f, claramente x_1 y x_2 no pueden ser raíces de g pues:

$$f'(x_i)g(x_i) - f(x_i)g'(x_i) \neq 0 \text{ y } f(x_i) = 0, \text{ para } i = 1,2.$$

Supongamos entonces que g no tiene raíces en el intervalo $[x_1, x_2]$, entonces la función auxiliar

$h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, es continua en $[x_1,x_2]$ y derivable en (x_1,x_2), por lo cual el TVM asegura que:

$$\exists \xi \in (x_1,x_2) : \frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1} = h'(\xi) = \frac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)}.$$

Claramente $h(x_2) = h(x_1) = 0,$ pues x_1 y x_2 son dos raíces de $f \Rightarrow h(x_2) - h(x_1) = 0,$ por lo que:

$h'(\xi) = \dfrac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)} = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi) = 0,$ lo cual es una contradicción, ya que lo anterior debe ser distinto de cero por hipótesis.

Entonces, el supuesto de que g no tiene raíces en el intervalo $[x_1, x_2]$ tiene que ser falso, es decir

$$\exists x_3 \in [x_1, x_2] : g(x_3) = 0.$$

Se vio que x_1 y x_2 no pueden ser raíces de $g \Rightarrow x_3 \in (x_1, x_2)$. Entonces entre dos raices consecutivas de f, existe al menos una raiz de g.

Es única, ya que si hubera otra se podría aplicar el mismo argumento anterior, intercambiando los roles de f y g y llegaríamos a qué $\exists x_4$ entre las dos raices de g, tal que $f(x_4) = 0$, lo cual contradice el hecho de que x_1 y x_2 son dos raíces consecutivas de f.

P2. Encuentre la ecuación de la recta $L \subseteq \mathbb{R}^2$ que pasa por el punto $P(3,5)$ y tal que el triángulo del primer cuadrante determinado por L y los ejes coordenados tenga área mínima.

Justifique el mínimo y calcule el área mínima.

La recta tiene por ecuación $y - 5 = m(x - 3)$ ya que el punto $P(3,5) \in L$.

La recta L intersecta al eje OX ssi $y = 0 \Rightarrow -5 = m(x-3) \Leftrightarrow x = 3 - \dfrac{5}{m} = \dfrac{3m-5}{m}.$

La recta L intersecta al eje OY ssi $x = 0 \Rightarrow y - 5 = m(-3) \Leftrightarrow y = 5 - 3m.$

El Área del triángulo pedido es entonces $A(m) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3m-5}{m} \cdot (5 - 3m) = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{(3m-5)^2}{m}.$

La condición de primer orden es $A'(m) = 0$. Para ello se calculará la derivada (respecto a m):

$$A'(m) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{6(3m-5)m - (3m-5)^2}{m^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{9m^2 - 25}{m^2}.$$

Por lo que $A'(m)=0 \Leftrightarrow 9m^2-25=0 \Leftrightarrow m=\pm\frac{5}{3}$.

Se quiere que el triángulo se forme en el primer cuadrante, por lo cual $m<0 \Rightarrow m^*=-\frac{5}{3}$.

$A'(m)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{9m^2-25}{m^2}=-\frac{1}{2}\cdot\left(9-\frac{25}{m^2}\right) \Rightarrow A''(m)=-\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{25}{m^3} \Rightarrow A''(m^*)=-\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{25}{\left(-\frac{5}{3}\right)^3}>0.$

Por lo que se deduce que m^* es efectivamente un mínimo.

Finalmente el área mínima sería: $A(m^*)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{(3m^*-5)^2}{m^*}=-\frac{1}{2}\cdot 10^2\cdot -\frac{3}{5}=30.$

P3. Analice la continuidad y diferenciabilidad en $\overline{x}=0$ de la función $f(x)=e^{-|x|}$.

Claramente $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-|x|}=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-x}=1$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{-|x|}=\lim\limits_{x\to 0^-} e^{x}=1$ por lo cual la función es continua en $\overline{x}=0$.

Ojo con decir que $f(0)=1 \Rightarrow f'(0)=0$, por ser la derivaba de una constante porque eso es una completa *herejía*. La derivada es un límite y por tanto se debe chequear si existe el límite:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$. Al analizarlo se darán cuenta que los límites por la derecha e iquierda no coinciden los límites por lo cual la derivada en cero no existe (f no es derivable en $\overline{x}=0$).

P4. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de clase $C^2(\mathbb{R})$. Se tiene que $\left|f(0)\right|\le M$, $\left|f(2)\right|\le M$ y $\left|f''(x)\right|\le K\ \forall x\in[0,2]$.

Donde $M,K\in\mathbb{R}^+$ fijos. Pruebe que $\left|f'(0)\right|\le M+K$. (Hint: Use un desarrollo de Taylor para f)

La indicación recomienda usar un Desarrollo de Taylor. Al ser f dos veces derivable podemos llegar, como máximo a expandir en torno a cero, como:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\tfrac{1}{2}f''(\xi)x^2,$$

y donde $\xi\in(0,x)$.

Evaluando en $x=2$, se obtiene $f(2)=f(0)+2f'(0)+2f''(\xi)$ donde $\xi\in(0,2)$.

Despejando $f'(0)$, se tiene: $f'(0)=\frac{1}{2}\big(f(2)-f(0)\big)-f''(\xi)$.

Tomando módulo de la expresión anterior y usando la desigualdad triangular:

$$\left|f'(0)\right|=\left|\tfrac{1}{2}\big(f(2)-f(0)\big)-f''(\xi)\right|\le\tfrac{1}{2}\left|f(2)\right|+\tfrac{1}{2}\left|f(0)\right|+\left|f''(\xi)\right|\le\tfrac{1}{2}M+\tfrac{1}{2}M+K=M+K.$$

$\therefore \left|f'(0)\right|\le M+K$

P5. Sabiendo que $f''(\overline{x})$ existe, pruebe que:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\overline{x}+h)-2f(\overline{x})+f(\overline{x}-h)}{h^2}=f''(\overline{x})$$

Solución:

Opción 1: Ver Control 1 2011-2, P2 (i) y (ii) para ver una solución con L'Hopital. Ojo que en este caso solo puede usarse $L'H$, 1 vez ya que f'' existe solo en $\overline{x}$. No tiene por qué existir $f''(\overline{x}+h)$ ó $f''(\overline{x}-h)$.

Opción 2: Usando un desarrollo limitado de orden 2, para f en torno a $\overline{x}$:

$f(x)=f(\overline{x})+f'(\overline{x})(x-\overline{x})+\frac{1}{2}f''(\overline{x})(x-\overline{x})^2+o\left((x-\overline{x})^2\right)$. Evaluando en $x=\overline{x}+h$ y $x=\overline{x}-h$:

- $f(\overline{x}+h)=f(\overline{x})+f'(\overline{x})h+\frac{1}{2}f''(\overline{x})h^2+o\left(h^2\right)$
- $f(\overline{x}-h)=f(\overline{x})-f'(\overline{x})h+\frac{1}{2}f''(\overline{x})h^2+o\left(h^2\right)$

Con lo cual el límite se puede escribir como:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\overline{x}+h)-2f(\overline{x})+f(\overline{x}-h)}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(\overline{x})+f'(\overline{x})h+\frac{1}{2}f''(\overline{x})h^2+o\left(h^2\right)-2f(\overline{x})+f(\overline{x})-f'(\overline{x})h+\frac{1}{2}f''(\overline{x})h^2+o\left(h^2\right)}{h^2}$$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f''(\overline{x})h^2+2\cdot o\left(h^2\right)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}f''(\overline{x})+2\dfrac{o\left(h^2\right)}{h^2}=f''(\overline{x})$, ya que $o(h)$ es tal que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{o(h^k)}{h^k}=0$.

Así $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\overline{x}+h)-2f(\overline{x})+f(\overline{x}-h)}{h^2}=f''(\overline{x})$.

P6. Considere la función $f_n:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, tal que $f_n(x)=x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\ldots+\dfrac{x^n}{n}\quad\forall n\geq 2$.

(a) Pruebe que la función es estrictamente creciente y estrictamente convexa $\forall n\geq 2$.

(b) Pruebe que la ecuación $f_n'(x)=2$ tiene solución única $\overline{x}\in[0,1]$.

Solución:

(a) $f_n'(x)=1+x^2+x^3+\ldots+x^n>0,\ \forall x>0$.

$f_n''(x)=2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}>0,\ \forall x>0$ y $\forall n\geq 2$. Notar que si $n=1,\ f_1(x)=x\Rightarrow f_1''(x)=0$.

$\therefore$ La función es estrictamente creciente y estrictamente convexa $\forall n\geq 2$.

(b) $f_n'(0)=1$ y $f_n'(1)=n$ (y por enunciado $n\geq 2$), entonces por TVI $\exists\overline{x}\in[0,1]:f_n'(x)=2$.

Esta solución es única pues f_n es estrictamente convexa $\Rightarrow f_n'$ es estrictamente creciente.

Propuesto 5:

Sean $p(x)$, $q(x)$ y $g(x)$, funciones continuas en $[0,1]$. Considere que $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ es una función de clase $C^2(\mathbb{R})$ con $f(0)=\alpha$, $f(1)=\beta$. $(\alpha,\beta\geq 0)$. La función f también satisface la ecuación diferencial:

$$f''+p(x)f'+q(x)f=g(x)\quad \forall x\in(0,1).$$

Suponga que $q(x)<0\ \ \forall x\in[0,1]$:

(a) Para probar que si $g(x)\leq 0$ en $[0,1]$, entonces $f(x)\geq 0\ \ \forall x\in[0,1]$, proceda como sigue:

(i) Justifique por qué $f(x)$ alcanza su mínimo global en $\overline{x}\in[0,1]$.

(ii) Suponga que $\overline{x}\in(0,1)$. Pruebe que $f''(\overline{x})\geq 0$.

(Hint: Utilice un desarrollo limitado de orden 2 de f en torno a $\overline{x}$)

(iii) Verifique qué condiciones cumplen las derivadas de f en $\overline{x}$ y concluya.

(b) Pruebe que si $\alpha=\beta=0$ y $g\equiv 0$, entonces $f\equiv 0$. (Hint: Considere la función $h(x)=-f(x)$)

Solución:

(a) (i) $f(x)$ alcanza su mínimo global en $\overline{x}\in[0,1]$, en virtud del *Teorema de Weierstrass*, ya que es continua en $[0,1]$.

(ii) Si $\overline{x}\in(0,1)$, entonces $f'(\overline{x})=0$. el desarrollo limitado es:

$$f(x)=f(\overline{x})+f'(\overline{x})(x-\overline{x})+\frac{1}{2}f''(\overline{x})(x-\overline{x})^2+o\left((x-\overline{x})^2\right)=f(\overline{x})+\frac{1}{2}f''(\overline{x})(x-\overline{x})^2+o\left((x-\overline{x})^2\right).$$

$$\therefore f''(\overline{x})=\frac{f(x)-f(\overline{x})}{(x-\overline{x})^2}+\frac{o\left((x-\overline{x})^2\right)}{(x-\overline{x})^2}\ \text{ tomando el límite cuando } x\to\overline{x}:$$

$$\lim_{x\to\overline{x}}f''(\overline{x})=\lim_{x\to\overline{x}}\frac{f(x)-f(\overline{x})}{(x-\overline{x})^2}+\frac{o\left((x-\overline{x})^2\right)}{(x-\overline{x})^2}.\ \text{Pero } \lim_{x\to\overline{x}}f''(\overline{x})=f''(\overline{x}) \text{ y } \lim_{x\to\overline{x}}\frac{o\left((x-\overline{x})^2\right)}{(x-\overline{x})^2}=0.$$

$$\Rightarrow f''(\overline{x})=\lim_{x\to\overline{x}}\frac{f(x)-f(\overline{x})}{(x-\overline{x})^2}\geq 0 \text{ ya que } \overline{x} \text{ es mínimo global, por lo cual } f(x)-f(\overline{x})\geq 0.$$

(iii) Si $\overline{x}\in(0,1)$ y $f(\overline{x})<0\Rightarrow \underbrace{\underbrace{f''(\overline{x})}_{\geq 0}+p(\overline{x})\underbrace{f'(\overline{x})}_{=0}+\underbrace{\underbrace{q(\overline{x})}_{<0}\underbrace{f(\overline{x})}_{\leq 0}}_{\geq 0}}_{\geq 0}=\underbrace{g(\overline{x})}_{\leq 0}$, que es una contradicción

$\Rightarrow f(\overline{x})\geq 0$ o bien $\overline{x}\not\in(0,1)$ (es decir $x=0$ o bien $x=1$)

- Si $\overline{x}\in(0,1)$ y $f(\overline{x})\geq 0\Rightarrow f(x)\geq f(\overline{x})\geq 0$, ya que $\overline{x}$ es mínimo global.
- Si $\overline{x}=0$, entonces $f(\overline{x})=f(0)=\alpha\geq 0$ y $f(x)\geq f(\overline{x})\geq 0$, ya que $\overline{x}$ es mínimo global.
- Si $\overline{x}=1$, entonces $f(\overline{x})=f(1)=\beta\geq 0$ y $f(x)\geq f(\overline{x})\geq 0$, ya que $\overline{x}$ es mínimo global.

Por lo tanto se concluye lo pedido: $f(x)\geq 0\ \ \forall x\in[0,1]$.

(b) En este caso $\alpha = \beta = 0$ y $g \equiv 0$, por lo que f satisface: $f'' + p(x)f' + q(x)f = 0 \quad \forall x \in (0,1)$

Claramente la función $h(x) = -f(x)$ satisface las mismas propiedades que f, ya que:

$h'' = -f''$, $h' = -f' \Rightarrow h'' + p(x)h' + q(x)h = 0$ y $h(0) = \alpha = 0 = h(1) = \beta$.

Por la parte (a) debe tenerse entonces que $h(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,1]$, es decir $-f(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq 0$.

Juntando el resultado de la parte (a) y (b) se deduce que $0 \underbrace{\leq}_{(a)} f(x) \underbrace{\leq}_{(b)} 0$, de donde se concluye que

$f \equiv 0$ (f es idénticamente nula en su dominio).