MA1002-6: Cálculo Diferencial e Integral.
Profesor: Daniel Remenik Z.
Auxiliar: Ítalo Riarte C.

Pauta Parcial Auxiliar 4

P1. Usando el Teorema del Valor Medio pruebe que:

$$x^{\alpha} \leq \alpha x + (1-\alpha), \text{ con } x \geq 0 \text{ y } \alpha \in (0,1).$$

Ind: Considere la función $f(x) = \alpha x - x^{\alpha}$.

Deduzca que si a y b son números positivos, entonces: $a^{\alpha} b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha)\cdot b$.

La función a considerar es continua y derivable, por lo cual el TVM pude aplicarse.

- $f'(x) = \alpha - \alpha x^{\alpha-1} = \alpha(1-x^{\alpha-1}) \Rightarrow f'(\xi) = \alpha(1-\xi^{\alpha-1})$.

Usando el intervalo $[a,b]$ se tiene que $\exists \xi \in (a,b)$:

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = f'(\xi) \Leftrightarrow \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \alpha(1-\xi^{\alpha-1}) \Leftrightarrow f(a)-f(b) = \alpha(1-\xi^{\alpha-1})(a-b).$$

Aquí se debe escoger a y b de manera inteligente, generalmente uno de ellos le llamaremos x.

Sea $0 \leq x \leq 1$, $a = x$ y $b = 1$, entonces $\exists \xi \in (x,1)$:

$$f(x) - f(1) = \alpha \underbrace{\underbrace{(1-\xi^{\alpha-1})}_{<0}\underbrace{(x-1)}_{\leq 0}}_{\geq 0} \geq 0.$$

Así $f(x) - f(1) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow \alpha x - x^{\alpha} \geq (\alpha - 1) \Leftrightarrow x^{\alpha} \leq \alpha x + (1-\alpha)$. $(*)$

Notar que lo anterior fue válido para $0 < x < 1$.

Consideremos $x \geq 1$, $a = 1$ y $b = x$, el TVM asegura que $\exists \xi \in (1,x)$:

$$f(1) - f(x) = \alpha \underbrace{\underbrace{(1-\xi^{\alpha-1})}_{>0}\underbrace{(1-x)}_{\leq 0}}_{\leq 0} \leq 0$$

Así $f(1) - f(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow \alpha x - x^{\alpha} \geq (\alpha - 1) \Leftrightarrow x^{\alpha} \leq \alpha x + (1-\alpha)$. $(**)$

así la desigualdad pedida es válida tanto para $0 \leq x \leq 1$ $(*)$ y también lo es para $x \geq 1$ $(**)$

Para probar $a^{\alpha} b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha)\cdot b$, basta considerar $x = \dfrac{a}{b}$, usarlo en la desigualdad recién probada y ordenar todo.

Nota: Porqué se tuvo cuidado de separar en los intervalos $[0,1]$ y $[1,\infty)$?

Para probar desigualdades con el TVM usualmente se necesita conocer el signo de la derivada, para así establecer una desigualdad, en este caso $f'(x) = \alpha(1 - x^{\alpha-1})$. Es muy importante recordar que $\alpha \in (0,1)$, por lo cual el exponente $(\alpha - 1)$ es negativo, entonces $f'(x) = \alpha\left(1 - \frac{1}{x^{1-\alpha}}\right)$ que es positivo dependiendo exactamente si x es mayor o menor que 1. De ahí la distinción entre esos dos intervalos (no es tan mágico como parece).

P2. (a) Sean $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ funciones derivables en (a,b), tales que $f'(x) = g'(x) \ \ \forall x \in (a,b)$, pruebe que:

$$f(x) = g(x) + k \ \ \forall x \in (a,b) \text{ y } k \in \mathbb{R}.$$

(b) Sea $y(x) = \arctan\left(\dfrac{2x-a}{a\sqrt{3}}\right) + \arctan\left(\dfrac{2a-x}{x\sqrt{3}}\right)$, donde $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Calcule $y'(x)$ y escríbalo en su forma más sencilla, para deducir que $y(x)$ puede escribirse de una forma más simple.

P3. Considere la función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, definida por la ley: $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\ln(x)}} & \text{si } x > 0. \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

(a) Determine Dom(f), el conjunto de puntos donde f es continua y posibles discontinuidades reparables.

(b) Calcule $f'(x)$ para $x > 0$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x)$. Analice crecimiento y existencia de máximos y mínimos locales y/o globales.

(c) Pruebe que existe un único $\overline{x} \in \left[\sqrt{e}, e^2\right]$ tal que $f(\overline{x}) = \pi$. (Ind: Recuerde que $2 < e < 3$ y $3 < \pi < 4$).

(d) Calcule f'', determine convexidades y puntos de inflexión, si los hay.

(e) Analice la existencia de asíntotas de todo tipo.

(f) Bosqueje el gráfico de f, e indique el recorrido de la función.

P4. (a) Se define la función $h(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{\operatorname{senh}(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Sabiendo que h es derivable en 0 y g es dos veces derivable en el intervalo $(-\delta, \delta)$, con $\delta > 0$, se pide calcular los valores de $g(0)$, a y $h'(0)$.

(b) Suponga ahora que $h''(0)$ existe y se tiene que $h''(0) = \beta$ (no calcule h'').

Escriba el desarrollo de Taylor de orden 2 de h en torno a $x_0 = 0$.

P5. Encuentre un desarrollo limitado para $\varphi(x) = \operatorname{sen}(x) + \cos(x)$ en torno a $\overline{x} = 0$, cuyo error máximo de aproximación en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, sea inferior a 10^{-3}.

Solo dicen que encontremos un desarrollo de taylor (pueden haber más) que cumpla lo pedido.

Siempre que hablen de error deben pensar en la fórmula de taylor (está en el resumen).

> *Fórmula de Taylor*:
>
> Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $(k+1)$-veces derivable en (a,b) y sea $T_f^k(\cdot)$ su desarrollo de Taylor de orden k en torno a $\overline{x} \in (a,b)$. Entonces para todo $x > \overline{x}$ (resp $x < \overline{x}$), existe $\xi \in (\overline{x}, x)$ (resp $\xi \in (x, \overline{x})$), tal que:
>
> $$f(x) = T_f^k(x - \overline{x}) + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} \cdot (x - \overline{x})^{k+1}.$$

En este caso $\overline{x} = 0$, $(a,b) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, entonces el módulo del error (E) es:

$\left|E\right| = \left|\frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} \cdot x^{k+1}\right|$. Se desea que $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \left|x\right| \leq \frac{\pi}{2} \leq 2$ y $\left|f^{(k+1)}(\xi)\right| \leq 2, \ \forall k \geq 0$

$\Rightarrow \left|E\right| \leq \left|\frac{2}{(k+1)!} \cdot 2^{k+1}\right| \leq 10^{-3} \Leftrightarrow \frac{2^{k+2}}{(k+1)!} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow 10^3 \cdot 2^{k+2} \leq (k+1)!$, lo cual se cumple para $k = 9$ (comprobarlo, aunque también sirve cualquier $k \geq 9$)

Por lo tanto el desarrollo limitado debe ser de orden 9.