MA1002-6: Cálculo Diferencial e Integral.
Profesor: Daniel Remenik Z.
Auxiliar: Ítalo Riarte C.

Ejercicios Resueltos de Aplicaciones de la Derivada.

P1. Pruebe que de todos los rectángulos con un perímetro dado, el cuadrado tiene área máxima.

Consideremos un reactángulo en principio de ancho x y largo y. Claramente el área del rectángulo es

$$A(x,y) = x \cdot y$$

El problema de la expresión anterior es que depende de 2 variables (x e y) por lo cual en primera instancia no se tienen las herramientas para resolverlo. Si se piensa mejor se darán cuenta que en estos problemas se deben imponer las condiciones geométricas correspondientes, para así encontrar una relación entre las variables, de forma de dejar la función a maximizar (o minimizar), dependiendo de 1 sola variable. En este caso la condición geométrica es que el perímetro es dado.

Sea P el perímetro del rectángulo. Claramente $P = 2x + 2y \Rightarrow y = \dfrac{P-2x}{2}$.

Así, el aréa puede ser expresada como: $A(x) = x \cdot \dfrac{P-2x}{2} = \dfrac{Px}{2} - x^2$, con $x \in (0, P)$.

Es importante indicar el rango de variación de la variable, para que todo tenga sentido $\Big(\text{ie} : x \in (0, P)\Big)$

Son candidatos a óptimos los $\tilde{x}$ que cumplan $A'(\tilde{x}) = 0$. Por lo cual se resolverá la ecuación $A'(\tilde{x}) = 0$.

$A'(x) = \left(\dfrac{Px}{2} - x^2\right)' = \dfrac{P}{2} - 2x$. Entonces $A'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{P}{2} - 2x = 0 \Leftrightarrow \tilde{x} = \dfrac{P}{4}$.

Así $\tilde{y} = \dfrac{P-2\tilde{x}}{2} = \dfrac{P}{4}$, por lo cual las dimensiones del rectángulo son: $x = y = \dfrac{P}{4}$.

Es decir el óptimo se logra cuando la figura es un cuadrado.

Pero... ¿Cómo sabemos que es un máximo y no un mínimo? Notar que $A'(x) = \dfrac{P}{2} - 2x$, con lo cual:

$A'(x) > 0$ para $x < \dfrac{P}{4} \Rightarrow A(x)$ es creciente para $x < \dfrac{P}{4}$.

$A'(x) < 0$ para $x > \dfrac{P}{4} \Rightarrow A(x)$ es creciente para $x > \dfrac{P}{4}$.

En palabras: a medida que nos acercamos a $\dfrac{P}{4}$ por la izquierda, A crece y a medida que nos alejamos por la derecha, A decrece, por lo tanto se tiene esta situación: $\nearrow^{\bullet}\searrow$ entonces es un máximo.

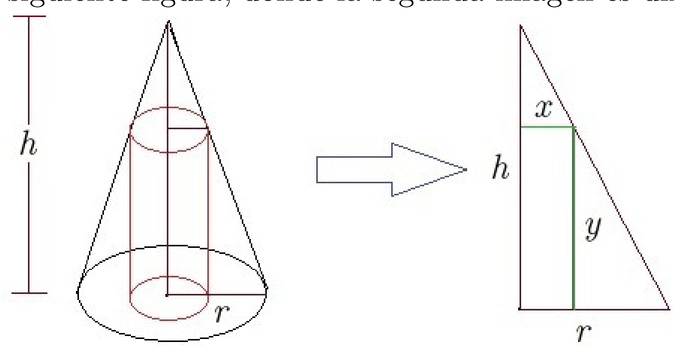
P2. Determinar las dimensiones de un cilindro inscrito en un cono de radio r y altura h de forma que el volumen del cilindro sea máximo. Indique el valor del volumen en tal caso.

Este problema es más complejo que el anterior, pero el procedimiento es el mismo:

La función a maximizar es el volumen del cilindro, sea x su radio e y su altura $\Rightarrow V(x,y)=\pi x^2 y$.

Nuevamente la función objetivo tiene 2 variables, por lo que hay que buscar la condición geométrica.

Para esto consideremos la siguiente figura, donde la segunda imagen es un corte en 2 dimensiones:



Notar que al rotar la segunda figura (en 2-D) se genera el cilindro inscrito en el cono, como se desea.

La condición geométrica en este caso viene por semejanza de triángulos, ya por ejemplo los dos triángulos rectángulos interiores son semejantes (hay más semejantes), de donde se obtiene la relación:

$$\frac{h-y}{x}=\frac{y}{r-x}\Rightarrow y=\frac{hr-hx}{r}.$$

Así ahora se puede escribir $V(x)=\pi x^2\dfrac{hr-hx}{r}$. Notar que convino más despejar y ya que x está al cuadrado, lo cual habría hecho más engorroso el desarrollo. Al volver a la expresión para $V(x)$:

$$V(x)=\pi x^2\frac{hr-hx}{r}=\pi\frac{hr\cdot x^2-h\cdot x^3}{r},\text{ con } x\in(0,r)$$

$$V'(x)=\pi\frac{hr\cdot 2x-h\cdot 3x^2}{r}=0\Leftrightarrow 2rx-3x^2=0\Leftrightarrow x\cdot(2r-3x)=0\Rightarrow x=0\vee x=\frac{2r}{3},$$

Claramente $0\notin(0,r)$, por lo que se descarta (Si alguien considera que $x\in[0,r]$ igualmente se descarta ya que genera un volumen mínimo e igual a cero, y buscamos máximos, no mínimos).

$\Rightarrow x=\dfrac{2r}{3}$ es candidato a máximo. Para confirmar que es así, nuevamente notar que:

$V'(x)>0$ para $x\in(0,\frac{2r}{3})\Rightarrow V'(x)$ es creciente en $(0,\frac{2r}{3})$.

$V'(x)<0$ para $x\in(\frac{2r}{3},r)\Rightarrow V'(x)$ es decreciente en $(\frac{2r}{3},r)$.

Por lo tanto, el óptimo es efectivamente un máximo. Así las dimensiones del cilindro son:

$$x=\frac{2r}{3},\quad y=\frac{hr-h\frac{2r}{3}}{r}=\frac{h}{3}.\ \text{Mientras que el volumen máximo es } V=\pi x^2 y=\pi\cdot\left(\frac{2r}{3}\right)^2\cdot\frac{h}{3}=\frac{4\pi r^2 h}{27}.$$

P3. Aplicaciones TVM: Demostrar las siguientes desigualdades:

(a) $\tan(x) > x$ para $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

La función $f(x) = \tan(x)$ es continua en $[0, \frac{\pi}{2})$ y derivable en $(0, \frac{\pi}{2})$ por lo que el TVM podría aplicarse sin problemas. Si hacemos un ajuste y en vez de aplicarlo en ese intervalo, lo aplicamos en $[0, x]$ con $x < \frac{\pi}{2}$, el TVM asegura que:

$$\exists \xi \in (0, x) : \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi).$$

Claramente $f(0) = 0$ y $f'(x) = \sec^2(x) \Rightarrow f'(\xi) = \sec^2(\xi),$ por lo que la expresión es equivalente a:

$$\exists \xi \in (0, x) : \frac{\tan(x)}{x} = \sec^2(\xi).$$

Claramente $0 < \cos(x) < 1$ para $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \dfrac{1}{\cos(x)} = \sec(x) > 1$ para $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \sec^2(\xi) > 1.$

Por lo tanto, $\dfrac{\tan(x)}{x} = \sec^2(\xi) > 1 \Rightarrow \dfrac{\tan(x)}{x} > 1 \Leftrightarrow \tan(x) > x,$ para $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Conlusión: La idea para resolver estos problemas es encontrar cotas para f'.

(b) Pruebe que $\dfrac{x}{1+x^2} < \arctan(x) < x$ para $x > 0$.

Sean $0 < a < b$ y consideremos el intervalo $[a,b]$ donde la función $g(x) = \arctan(x)$ es continua.

Es claro que g es derivable en (a,b), con lo cual se cumplen las hipótesis del TVM, es decir:

$$\exists \xi \in (a,b) : \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = g'(\xi).$$

Claramente $g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \Rightarrow g'(\xi) = \dfrac{1}{1+\xi^2}$. Como $a < \xi < b : \dfrac{1}{1+b^2} < \dfrac{1}{1+\xi^2} < \dfrac{1}{1+a^2}$

Por lo cual $\dfrac{1}{1+b^2} < \dfrac{\arctan(b) - \arctan(a)}{b - a} < \dfrac{1}{1+a^2}$. Basta poner $b = x$ y $a = 0$, con lo cual:

$$\frac{1}{1+x^2} < \frac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x - 0} < \frac{1}{1+0^2} \Leftrightarrow \frac{1}{1+x^2} < \frac{\arctan(x)}{x} < 1.$$

Como $x > 0 : \dfrac{x}{1+x^2} < \arctan(x) < x$, como se deseaba probar.

Nota: Podría haberse visto que la desigualdad $\arctan(x) < x,$ sale directamente de la parte (a):

$\tan(x) > x \Rightarrow \arctan\big(\tan(x)\big) > \arctan(x) \Leftrightarrow x > \arctan(x)$.