MA1002-6: Cálculo Diferencial e Integral.
Profesor: Daniel Remenik Z.
Auxiliar: Ítalo Riarte C.

Pauta Auxiliar 3

P1. Considere la función $f(x) = 1 + xe^{1/x}$.

(a) Calcule f' y determine intervalos de crecimiento y decrecimiento para f.

(b) Demuestre que existe un único $\overline{x} \in [-2,-1]$ tal que $f(\overline{x}) = 0$.

P2. (a) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones derivables en $\mathbb{R}$, tales que:

$$f(0) = g(0) \;\text{ y }\; f'(x) \leq g'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Muestre que $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \geq 0$.

(b) Demuestre que: $\quad 2e^x + e^{-x} \geq 2\sqrt{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

P3. (a) El tronco de un árbol tiene una forma de tronco de cono de altura $H > 0$, de radio superior r e inferior R, donde $0 < r < R$. De este árbol se desea tallar un cilindro de base circular de modo de maximizar su volumen.

Encuentre las dimensiones de este cilindro en términos de los datos.

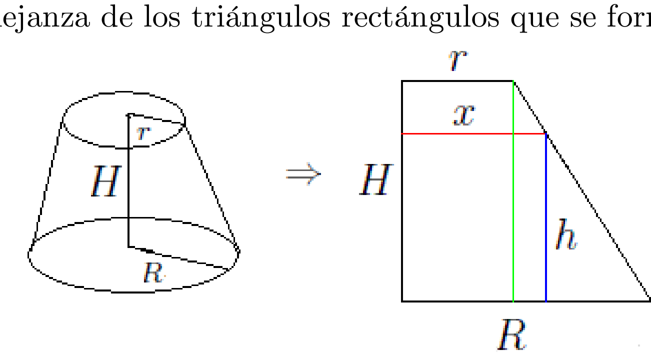
Atención : Dependiendo de los valores de r y R, pueden presentarse diferentes casos.

Sea x el radio del cilindro tallado e y su altura, donde $x \in [r, R]$ e $y \in [0, H]$

En principio la función a maximizar (volumen de un cilindro) depende de dos variables es decir $V(x,y) = \pi x^2 y$.

La idea es explotar la geometría del problema para dejar la función a optimizar dependiendo de UNA sola variable es decir una expresión del tipo $V(x)$ o $V(y)$ según sea más conveniente para trabajar.

Ocupando la noción de semejanza de los triángulos rectángulos que se forman en la siguiente figura:



Se obtiene la relación: $\dfrac{H}{h} = \dfrac{R-r}{R-x} \Leftrightarrow h = H\dfrac{R-x}{R-r}$. Reemplanzando esto en la función V,

$$V(x) = \pi x^2 H\frac{R-x}{R-r} \;\;,\;\; x \in [r,R]$$

Los puntos críticos de esta función son los bordes $x = r,\ x = R$ y donde $V'(x) = 0$. Derivando

$$V'(x) = \frac{\pi H}{R-r}(2xR - 3x^2) \;\;,\;\; x \in (r,R)$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \;\vee\; x = \frac{2}{3}R;$$

Claramente $x = 0 \notin [r,R]$ (se descarta pues $r > 0$).

Mientras que $x = \dfrac{2}{3}R \in [r,R]$ si y solo si $r \leq \dfrac{2}{3}R$.

• si $r < x < \dfrac{2}{3}R$ se tiene que $V'(x) > 0$ es decir V es creciente.

• si $x > \dfrac{2}{3}R$ se tiene que $V'(x) < 0$ es decir V es decreciente.

$\Rightarrow x = \dfrac{2}{3}R$ es máximo.

Conclusión:

$1.-$ Si $r \leq \dfrac{2}{3}R$ entonces la función tiene un máximo global en $x = \dfrac{2}{3}R$. En ese caso las dimensiones del cilindro son:

- radio $= x = \dfrac{2}{3}R$

- altura $= h = H\dfrac{\frac{R}{3}}{R-r}$

$2.-$ Si $r > \dfrac{2}{3}R$ entonces en $x \leq r < \dfrac{2}{3}R$ la función V es estrictamente decreciente en el intervalo $[r,R]$ y por lo tanto, tiene su máximo global en el extremo del intervalo $x = r$.

En ese caso las dimensiones del cilindro son:

- radio $= x = r$.

- altura $= h = H$.

(b) Un grupo de físicos se encuentra en la estación espacial chilena *volantín* estudiando la órbita del cometa $UCHC2$. Ellos han determinado que esta órbita es parabólica de ecuación $y = \frac{x^2}{4}$, tomando el origen en volantín y midiendo las longitudes en Unidades Astronómicas Apropiadas (UAA).

En este mismo sistema, el sol está en la posición $S = (1,2)$. Se sabe que por su composición química, $UCHC2$ explotaría si su distancia al sol fuera menor o igual que 1 UAA.

Se le pide que colabore con estos científicos, para saber si el cometa explotará o no. Para esto debe escribir la distancia del cometa al sol en función de x, calcular la menor distancia del cometa al sol y decidir si explotará o no.

Escribiendo la función de distancia (d) del cometa al sol, se tiene lo siguiente:

$d(x,y) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$ Donde (x,y) es ls posición del cometa, y (1,2) la del sol. Recordando que tiene que recorrer una parábola ecuación $y = \frac{x^2}{4}$, la función de distancia puede expresarse en función de una sola variable (x).

$$d(x) = \sqrt{(x-1)^2 + (\tfrac{x^2}{4} - 2)^2}.$$

Derivando e igualando a cero se buscarán los candidatos a mínimo.

$$d'(x) = \frac{2(x-1) + 2(\frac{x^2}{4} - 2)\cdot\frac{x}{2}}{2\sqrt{(x-1)^2 + (\frac{x^2}{4} - 2)^2}} = \frac{\frac{x^3}{4} - 2}{2\sqrt{(x-1)^2 + (\frac{x^2}{4} - 2)^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{4} - 2 = 0 \Rightarrow x = 2.$$

• si $x < 2:\ \ d'(x) > 0 \Rightarrow d(x)$ es creciente para $x < 2$.

• si $x > 2:\ \ d'(x) > 0 \Rightarrow d(x)$ es creciente para $x > 2$.

Así en $x = 2$ se alcanza un mínimo y la distancia vale $d(2) = \sqrt{(2-1)^2 + (\frac{2^2}{4} - 2)^2} = \sqrt{2}$.

Esto significa que la mínima distancia del cometa al sol es $\sqrt{2}$ UAA, por lo cual no explota.

Los problemas 4 y 5 serán resueltos en la próxima clase.