MA1002-6: Cálculo Diferencial e Integral.
Profesor: Daniel Remenik Z.
Auxiliar: Ítalo Riarte C.

Auxiliar 3: Derivadas (I).

Teorema 1: Si $\overline{x}$ es un mínimo (o máximo) local de una función derivable $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, entonces $f'(\overline{x})=0$.

TVM: Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ funciones contínuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b) con $g(b)\neq g(a)$ y $g'(x)\neq 0$ en (a,b), entonces existe $\xi\in(a,b)$ tal que: $\dfrac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. En particular, si $g(x)=x$, se tiene que:

$$\boxed{\exists\xi\in(a,b):\ \frac{f(a)-f(b)}{a-b}=f'(\xi)}$$

Monotonía: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si $f'(x)\geq 0$ (≤ 0) para todo $x\in(a,b)$,

$\Rightarrow f$ es creciente (decreciente) en $[a,b]$. Si la desigualdad es estricta, la monotonía también lo es.

Problemas:

P1. Considere la función $f(x)=1+xe^{1/x}$.

(a) Calcule f' y determine intervalos de crecimiento y decrecimiento para f.

(b) Demuestre que existe un único $\overline{x}\in[-2,-1]$ tal que $f(\overline{x})=0$.

P2. (a) Sean $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funciones derivables en $\mathbb{R}$, tales que:

$$f(0)=g(0)\ \text{ y }\ f'(x)\leq g'(x)\ \ \forall x\in\mathbb{R}$$

Muestre que $f(x)\leq g(x)\ \ \forall x\geq 0$.

(b) Demuestre que: $\quad 2e^x+e^{-x}\geq 2\sqrt{2},\quad \forall x\in\mathbb{R}$.

P3. (a) El tronco de un árbol tiene una forma de tronco de cono de altura $H>0$, de radio superior r e inferior R, donde $0<r<R$. De este árbol se desea tallar un cilindro de base circular de modo de maximizar su volumen.

Encuentre las dimensiones de este cilindro en términos de los datos.

Atención: Dependiendo de los valores de r y R, pueden presentarse diferentes casos.

(b) Un grupo de físicos se encuentra en la estación espacial chilena *volantín* estudiando la órbita del cometa $UCHC2$. Ellos han determinado que esta órbita es parabólica de ecuación $y = \frac{x^2}{4}$, tomando el origen en volantín y midiendo las longitudes en Unidades Astronómicas Apropiadas (UAA).

En este mismo sistema, el sol está en la posición $S = (1,2)$. Se sabe que por su composición química, $UCHC2$ explotaría si su distancia al sol fuera menor o igual que 1 UAA.

Se le pide que colabore con estos científicos, para saber si el cometa explotará o no. Para esto debe escribir la distancia del cometa al sol en función de x, calcular la menor distancia del cometa al sol y decidir si explotará o no.

P4. Usando el Teorema del Valor Medio pruebe que:

$$x^\alpha \leq \alpha x + (1-\alpha), \text{ con } x \geq 0 \text{ y } \alpha \in (0,1).$$

Ind: Considere la función $f(x) = \alpha x - x^\alpha$.

Deduzca que si a y b son números positivos, entonces: $a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha)\cdot b$.

P5. (a) Sean $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ funciones derivables en (a,b), tales que $f'(x) = g'(x) \ \ \forall x \in (a,b),$ pruebe que:

$$f(x) = g(x) + k \ \ \forall x \in (a,b) \text{ y } k \in \mathbb{R}.$$

(b) Sea $y(x) = \arctan\left(\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}\right) + \arctan\left(\frac{2a-x}{x\sqrt{3}}\right)$, donde $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Calcule $y'(x)$ y escríbalo en su forma más sencilla, para deducir que $y(x)$ puede escribirse de una forma más simple.