MA1002-6: Cálculo Diferencial e Integral.
Profesor: Daniel Remenik Z.
Auxiliar: Ítalo Riarte C.

Pauta Auxiliar 2.

Nota: Se incluyen preferentemente, las pautas de los problemas <u>no</u> resueltos en auxiliar y algunos otros de manera extra.

P1. Sea $f:[0,2a]\to\mathbb{R}$ una función continua tal que $f(0)=f(2a)$, Pruebe que existen $x,y\in[0,2a]$ con $x-y=a$ tales que $f(x)=f(y)$.

P2. Sean $f,g:[a,b]\to[c,d]$ funciones continuas, tales que $f(a)=g(b)=c$.

Demuestre que $\exists\overline{x}\in[a,b]$, tal que $f(\overline{x})=g(\overline{x})$.

Resolución muy típica, la dificultad del problema es fijarse en el Dominio y Recorrido de las funciones y que $f(a)=g(b)=c$. Donde c es uno de los extremos del intervalo $[c,d]=\mathrm{Rec}(f)$.

Definiendo: $h(x)=f(x)-g(x)$, que es una función continua por ser resta de continuas se tiene que:

- $h(a)=f(a)-g(a)=c-g(a)\leq 0$.
- $h(b)=f(b)-g(b)=f(b)-c\geq 0$.

Ambas desigualdades se explican por el hecho de que c es el mínimo valor que alcanzan f y g.

$\Rightarrow h(a)\cdot h(b)\leq 0:$ Por TVI se tiene que $\exists\overline{x}\in[a,b]$, tal que $h(\overline{x})=0\Leftrightarrow f(\overline{x})-g(\overline{x})=0\Leftrightarrow f(\overline{x})=g(\overline{x})$.

P3. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua tal que $\forall x\in\mathbb{R}$; $|x|\leq f(x)$. Considere $y_0=f(0)$ y el intervalo $\mathcal{I}=[-y_0,y_0]$.

(a) Demuestre que $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathcal{I}:\ f(x)>y_0$.

(b) Concluya que f alcanza su mínimo en $\mathbb{R}$ en un punto de $\mathcal{I}$.

P4. Estudie la continuidad uniforme en $(0,1)$ de las funciones:

(a) $f(x)=x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Si el intervalo fuera un intervalo $\mathcal{A}$ cerrado y acotado podría recurrirse al teorema que dice:

$$f \text{ es continua en } \mathcal{A} \text{ ssi } f \text{ es uniformemente continua en } \mathcal{A}.$$

Entonces, extendiendo la función f en [0,1] como:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La cual es continua en (0,1] por álgebra de funciones continuas, y además claramente:

$\lim\limits_{x\to 0} \tilde{f}(x) = \lim\limits_{x\to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = \tilde{f}(0),$ pues la función seno es acotada. Con esto se concluye que f es continua en 0. Así $\tilde{f}$ es una función continua en [0,1] (cerrado y acotado) y por ende uniformemente continua en [0,1]. En particular será uniformemente continua en todo $(0,1) \subseteq [0,1]$.

(b) $g(x) = e^x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

Si se hace lo mismo que en la parte (a), se darán cuenta que esta función no se puede extender a [0,1] como una función continua. Se probará que esta función no es uniformemente continua:

Recordar que la definidad de continuidad uniforme es:

$$\left(\forall x,y \in A\right)\left(\forall \varepsilon > 0\right)\left(\exists \delta(\varepsilon) > 0\right): \ \left|x-y\right| \leq \delta \Rightarrow \left|f(x)-f(y)\right| \leq \varepsilon.$$

Por lo que se probará que existen $x,y \in (0,1)$ y algún $\varepsilon > 0,$ tales que para todo $\delta > 0,$ se tiene:

$$\left|x-y\right| \leq \delta \wedge \left|f(x)-f(y)\right| \geq \varepsilon.$$

Considerando $x_n = \frac{1}{2n\pi}, \ \ y_n = \frac{1}{2n\pi+\pi}$, se tiene que $\left|x_n - y_n\right| \to 0,$ es decir $\left|x_n - y_n\right| \leq \delta.$

Respecto a $\left|f(x_n)-f(y_n)\right| = \left|e^{x_n}\cdot\cos\left(\frac{1}{x_n}\right) - e^{y_n}\cdot\cos\left(\frac{1}{y_n}\right)\right| = \left|e^{\frac{1}{2n\pi}}\cdot\cos\left(2n\pi\right) - e^{\frac{1}{2n\pi+\pi}}\cdot\cos\left(2n\pi+\pi\right)\right|$

$$= \left|e^{\frac{1}{2n\pi}} + e^{\frac{1}{2n\pi+\pi}}\right| \to e^0 + e^0 = 2.$$

$\Rightarrow \left|f(x_n)-f(y_n)\right| = \left|e^{\frac{1}{2n\pi}} + e^{\frac{1}{2n\pi+\pi}}\right| \geq 2,$ con lo cual se encuentra $\varepsilon = 2$ y $x_n, y_n \in (0,1)$ tales que para, $\forall\, \delta > 0: \ \left|x_n - y_n\right| \leq \delta \wedge \left|f(x_n)-f(y_n)\right| \geq \varepsilon$. Esto prueba que f no es uniformemente continua en (0,1).

P5. Calcule la derivada de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = \cos(\operatorname{sen} x) + x^{\operatorname{sen} x} + x^5 \cdot e^{\tan x}$.

(b) $g(x) = \arctan\left(\operatorname{arcsen}(\frac{\ln 3x}{\cosh x})\right)$.

(c) $h(x) = e^{-|x|}$. (Indicación: Analice los casos $x > 0$; $x = 0$ y $x < 0$).

Se analizará solo la parte (c) del P5, dado que me sorprendió cómo respondieron en clases,

$$h(x) = e^{-|x|} = \begin{cases} e^{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- Para $x < 0:\ h'(x) = e^{x}$.
- Para $x > 0:\ h'(x) = -e^{-x}$.
- Para $x = 0:$ Debe calcularse por definición, (ojo con decir que vale cero por ser una constante!! Notar que la función está evaluada en $x = 0$, por lo que obviamente $h(0)$ es un valor real)

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-1}{x}$, aquí se deben analizar límites laterales, porque la función toma distintos valores a la derecha e izquierda de cero.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{x}-1}{x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-x}-1}{x} = -1.$$

Por lo cual el límite no existe, es decir, $f'(0)$ no existe.

P6. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función que satisface:

1) $\forall a,b \in \mathbb{R} : f(a+b) = f(a) + f(b) + a^2 b + ab^2$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

(a) Demuestre que $f(0) = 0$ y que f es una función impar.

(b) Calcule $f'(0)$.

(c) Escriba la ecuación de la recta tangente y normal a la función $\varphi(x) = \left(1 + f(x)\right)^3$ en $x = 0$.

(d) Calcule $f'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. ¿Es f una función necesariamente continua en todo $\mathbb{R}$?

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x)+f(h)+x^2h+xh^2-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{f(h)}{h} + x^2 + xh \right\} = 1 + x^2.$$

Al existir la derivada de f en todo $\mathbb{R}$, f debe ser continua en $\mathbb{R}$, recordar que diferenciabilidad implica continuidad (pero continuidad $\not\Rightarrow$ diferenciabilidad).

(e) Calcule $f''(x)$ y $\left(f' \circ f'\right)'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- $f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(1 + x^2\right)' = 2x.$
- $\left(f' \circ f'\right)' = \left(f'(f'(x))\right)' = f''(f'(x)) \cdot f''(x) = 2 \cdot (1 + x^2) \cdot (2x) = 4x(1 + x^2).$

La otra opción, es calcular explícitamente el valor de $\left(f' \circ f'\right)(x)$ y eso derivarlo como es usual, es decir,

$\left(f' \circ f'\right)' = \left(f'(f'(x))\right)' = \left(f'(1+x^2)\right)' = \left[1+\left(1+x^2\right)^2\right]' = 2(1+x^2)\cdot 2x = 4x(1+x^2).$

De todas formas es bueno que manejen bien la regla de la cadena, por lo que es preferible el primer desarrollo.

P7. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función infinitamente derivable e impar.

Pruebe que f' es par y además que $f^{(2n)}(0)=0,\ \forall n\in\mathbb{N}$.

• f es una función impar ssi: $f(x)=-f(-x),$ derivando a ambos lados y recordando la regla de la cadena, se obtiene que: $f'(x)=-f'(-x)\cdot(-x)' \Leftrightarrow f'(x)=f'(-x) \Rightarrow f'$ es par.

Aunque no se exige, al derivar a ambos lados la última expresión se obtiene que f'' es una función impar.

• Para probar que $f^{(2n)}(0)=0,\ \forall n\in\mathbb{N},$ notar que las derivadas de "orden par" son funciones "impares".

En efecto, para $n=0$ se cumple por enunciado que $f^{(2\cdot 0)}(x)=f(x)$ es impar.

Si se supone cierto para un n entonces debe probarse para $n+1$ y se concluirá por por inducción:

Si es verdad que $f^{(2n)}(x)$ es impar, entonces por lo probado anteriormente se tendrá que su derivada es una función par $\Rightarrow \left(f^{(2n)}(x)\right)' = f^{(2n+1)}(x)$ es una función par $\Leftrightarrow f^{(2n+1)}(x)=f^{(2n+1)}(-x).$

Derivando a ambos lados se tiene que $\left(f^{(2n+1)}(x)\right)' = \left(f^{(2n+1)}(-x)\right)'\cdot(-x)' \Leftrightarrow f^{(2n+2)}(x)=-f^{(2n+2)}(-x).$

La última igualdad $f^{(2n+2)}(x)=-f^{(2n+2)}(-x)$ es equivalente a $f^{(2(n+1))}(x)=-f^{(2(n+1))}(-x)$

es decir $f^{(2(n+1))}$ es una función impar $\Rightarrow$ Para $n+1$ la proposición es cierta

Por el principio de inducción, se tiene entonces que $f^{(2n)}$ es impar, $\forall n\in\mathbb{N}.$

Por último, para concluir que $f^{(2n)}(0)=0,\ \forall n\in\mathbb{N},$ basta notar que si φ es una función impar, necesariamente $\varphi(0)=0$. Esto es ya que:

$\varphi(0)=\varphi(-0)\underbrace{=}_{\substack{\text{imparidad}\\ \text{de }\varphi.}}-\varphi(0)\Rightarrow\varphi(0)=-\varphi(0)\Leftrightarrow 2\varphi(0)=0\Leftrightarrow\varphi(0)=0.$

Como se probó que $f^{(2n)}$ es impar, $\forall n\in\mathbb{N},$ se concluye que $f^{(2n)}(0)=0,\ \forall n\in\mathbb{N}.$